İspat Yöntemleri

Üçüncü Baskıdan Çeviri

Richard Hammack

Çevirenler

Mehmet Dağlı
Amasya Üniversitesi

Oktay Ölmez
Ankara Üniversitesi

Richard Hammack (yayımcı)
Department of Mathematics & Applied Mathematics
P.O. Box 842014
Virginia Commonwealth University
Richmond, Virginia, 23284

İspat Yöntemleri

3. Baskı

Dizgi, PDFLaTeX'te 11 puntoluk TeX Gyre Schola yazıtipi ailesi kullanılarak yapılmıştır.

Kapak tasarımı R. Hammack tarafından yapılmıştır. Kapak diyagramları; bir nesnenin kat planından, o nesnenin doğru perspektif görünümünün oluşturulmasına olanak veren geometrik çizime dayanır. (Buradaki nesne sekizgen bir sütundur.) Bu yöntem, bir Rönesans ressamı ve matematikçisi olan Piero della Francesca (1415-1492) tarafından bulunmuştur.

Öğrencilerime

İçindekiler

Teşekkür

Herhangi bir telif hakkı istemeden bu kitabı Türkçe'ye çevirmemize izin veren Richard Hammack'a teşekkür ederiz. Yaptığımız çeviriyi titizlikle kontrol eden, çevirmekte zorlandığımız kısım ve kavramlar konusunda önerilerde bulunan Ercan Altınışık'a minnettarız. Ayrıca doğrudan veya dolaylı yoldan katkıları bulunan Ahmet Altürk, Burcu Dağlı, Kürşat Efe, Merve Okur, Metin Orbay ve Tevfik Şahin'e teşekkürlerimizi sunarız.

Üçüncü Baskıya Önsöz

Bu kitabı, çok ucuz ve yüksek kaliteli bir ders kitabı oluşturmak amacı ile yazdım. Kitap, ücretsiz olarak web sayfamdan PDF formatında indirilebilir. Basılı sürümünün fiyatı ise geleneksel ders kitaplarına nazaran çok daha düşüktür.

Bu üçüncü baskıda, (sayma üzerine olan) Ünite 3 genişletilmiş ve analizdeki ispatlar konusunda yeni bir ünite eklenmiştir. Ayrıca kitaba yeni örnekler ve alıştırmalar ilave edilmiştir. Düzeltmelere ilişkin aldığım kararlar hem Amazon eleştirileri hem de okuyuculardan gelen elektronik postalar doğrultusunda yapılmıştır. Tüm yorumlar için minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Üçüncü baskının ikinci baskı ile uyumlu olmasına özen gösterilmiştir. Alıştırmaların sırası değiştirilmemiştir. Ancak anlaşılabilirlik açısından bazı alıştırmalar yeniden yazılmış ve yeni alıştırmalar eklenmiştir. (Tek istisna, Ünite 3'ün yeniden düzenlenmesinden dolayı bazı alıştırmaların kaymasıdır.) Ünite sıralaması, tek bir istisna dışında öncekiyle aynıdır: Kardinalite hakkındaki son ünite, analizdeki ispatlar ile ilgili Ünite 13'e yer açmak için Ünite 14 olmuştur. Ünite 10 ve 11'deki bölümlerin numaraları biraz değişmiş ancak bölüm içindeki alıştırmaların sıralaması aynı kalmıştır.

Bu kitap, küçük bir sosyal bilimler yüksek okulu olan Randolph-Macon Koleji ve büyük bir devlet üniversitesi olan Virginia Commonwealth Üniversitesi'nde son 18 yıldır verdiğim ispat yöntemleri ders notlarının geliştirilmesi ve genişletilmesiyle oluşturulmuştur. Her iki üniversitedeki kitlenin ihtiyaçlarının aynı olduğu gözlemleyerek bu kitabı yazdım. Ancak daha geniş bir kitlenin ihtiyaçlarına karşı da duyarlıyım. Bu kitabın hemen hemen her matematik lisans programı için uygun olduğuna inanıyorum.

RICHARD HAMMACK

Lawrenceville, Virginia
14 Şubat 2018

Giriş

Bu kitap, teoremlerin nasıl ispatlanacağını anlatır.

Matematik, eğitim hayatınızın muhtemelen bu noktasına kadar önceliği hesaplama olan bir disiplin şeklinde sunulmuştur. Bu süreçte denklemleri çözmeyi, türev ve integral almayı, matrisleri çarpmayı ve determinantları hesaplamayı öğrendiniz; bunların dünyamızdaki pratik soruları nasıl cevapladığını gördünüz. Bu bağlamda, matematiği öncelikli olarak cevapları bulmak için kullandınız.

Ancak matematiğin uygulamalarından çok, teorik olan başka bir tarafı vardır. Bu kitaptaki öncelikli hedefimiz matematiksel yapıları anlamak, matematiksel önermeleri ispatlamak ve hatta yeni teoremleri ve teorileri keşfetmek olacaktır. Şu ana kadar öğrenip kullandığınız matematiksel yöntem ve işlemler matematiğin bu teorik tarafı üzerine inşa edilmiştir. Örneğin, bir eğrinin altında kalan alan hesaplanırken analizin temel teoremi kullanılır. Bu teorem doğru olduğu için bulunan cevap da doğrudur. Fakat analiz dersini öğrenirken, muhtemelen bunun neden doğru olduğunu anlamaktan ziyade nasıl uygulanacağına odaklandınız. Ancak bu teoremin doğru olduğunu nereden *biliyoruz?* Bu teoremin doğru olduğuna dair kendimizi veya bir başkasını nasıl ikna edebiliriz? Bu nitelikteki sorular matematiğin teorik kısmına aittir. Bu kitap, teorik kısım için bir giriş niteliği taşımaktadır.

Bu kitap size gizemli bir dünyanın kapısını aralayacaktır. Matematikçilerin teoremleri doğrulamak, matematiksel gerçeği keşfetmek ve yeni teorileri oluşturmak için kullandıkları düşünce yöntemlerini öğrenecek ve uygulayabileceksiniz. Bu ise sizi gelecekte alacağınız derslere hazırlayarak ispatları daha iyi anlamanızı ve kendi ispatlarınızı yapabilmenizi sağlayacak, matematiksel olarak meraklı ve eleştirel düşünmenize yardım edecektir.

Bu kitap aşağıda özetlendiği şekilde dört ana kısımdan oluşmaktadır.

I. KISIM Temel Kavramlar

- Ünite 1: Kümeler
- Ünite 2: Mantık
- Ünite 3: Sayma

Ünite 1 ve 2, ileri matematikte kullanılan dili ve kuralları ortaya koyar. Her matematiksel yapı, nesne veya varlık bir küme olarak ifade edilebilir. Bu nedenle kümeler oldukça önemlidir. Mantık; önermeleri anlamamıza, matematiksel yapılar hakkında bilgi edinmemize ve yeni yapılar ortaya çıkarmamıza olanak sağladığı için temel bir önem arz eder. Sonraki tüm üniteler, bu ilk iki ünite üzerine inşa edilmiştir. Ünite 3 bu kitaba kısmen dahil edilmiştir çünkü oradaki konular matematiğin birçok dalı için oldukça önemlidir. Ayrıca bu kitaptaki çoğu örnek ve alıştırma için bir kaynak teşkil eder. (İstenildiği taktirde dersin öğretim elemanı 3. üniteyi atlayabilir.)

II. KISIM Koşullu Önermelerin İspatlanması

- Ünite 4: Doğrudan İspat
- Ünite 5: Dolaylı İspat
- Ünite 6: Olmayana Ergi

Ünite 4, 5 ve 6 *"Eğer P ise Q."* koşullu formunda verilen teoremleri ispatlamak için kullanılan üç temel yöntemle ilgilenir.

III. KISIM İspat Üzerine Daha Fazlası

- Ünite 7: Koşulsuz Önermelerin İspatlanması
- Ünite 8: Kümeleri İçeren İspatlar
- Ünite 9: Aksini İspat
- Ünite 10: Matematiksel Tümevarım

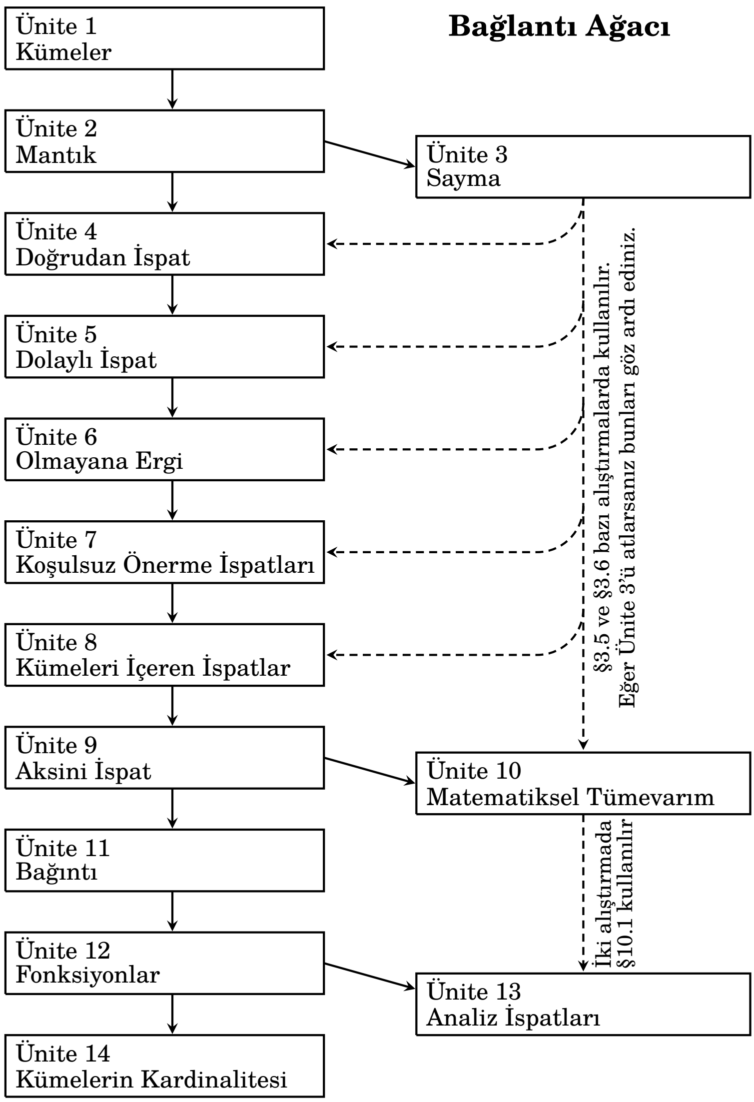
Buradaki üniteler, II. kısımda verilen ispat tekniklerinin pratik versiyonları, çeşitlemeleri ve sonuçları ile ilgilenir.

IV. KISIM Bağıntı, Fonksiyon ve Kardinalite

- Ünite 11: Bağıntı
- Ünite 12: Fonksiyon
- Ünite 13: Analiz İspatları
- Ünite 14: Kümelerin Kardinalitesi

Bu kısımda bulunan üniteler, matematiğin merkezi konumunda bulunan *fonksiyon* kavramıyla ilgilenir. Bu konuları anladıktan sonra; soyut cebir, analiz, topoloji, kombinatorik ve hesaplama teorisi gibi ileri matematik derslerine hazır olacaksınız.

Üniteler, aşağıda verilen bağlantı ağacında olduğu gibi sıralanmıştır. Sol taraftaki sütunda bulunan üniteler kitabın ana kısmını oluşturur. Bu sütundaki her ünite, üst tarafındaki tüm ünitelerden materyaller içerir. Ünite 3 ve 13 kesinti kaybı olmaksızın atlanabilir. Ancak 3. ünite çok sayıda alıştırmanın kaynağını teşkil eder. Bu nedenle 3. üniteyi atlayan okurlar, ilerideki ünitelerde bulunan bununla ilgili alıştırmaları göz ardı edebilir. Tümevarım hakkındaki Ünite 10 da atlanabilir. Ancak tümevarım, çoğu ispat dersinin içerdiği bir konudur.



Öğretim Elemanına Mesaj. Bu kitap, üç veya dört kredilik bir ders için tasarlanmıştır. Ayrık matematik vurgusu yapan bir ders, 1-12 ünitelerini kapsayabilir. Analize hazırlık niteliği taşıyan bir ders ise 3. ünite dışındaki tüm üniteleri kapsayabilir. Aşağıda bu iki seçenek için on dört haftalık bir dönemde kullanılabilecek melez bir ders uygulama planı verilmiştir. Sınıfta, $*$ ile işaretlenmiş bölümlerden kısaca bahsedilebilir veya bunları kendi başlarına öğrenmeleri için öğrencilere ödev olarak bırakabilirsiniz.

Hafta	Pazartesi	Çarşamba	Cuma
1	Bölüm 1.1	Bölüm 1.2	Bölüm 1.3, 1.4
2	Bölüm 1.5, 1.6, 1.7	Bölüm 1.8	Bölüm 1.9*, 2.1
3	Bölüm 2.2	Bölüm 2.3, 2.4	Bölüm 2.5, 2.6
4	Bölüm 2.7	Bölüm 2.8*, 2.9	Bölüm 2.10, 2.11*, 2.12*
5	Bölüm 3.1, 3.2, 3.3	Bölüm 3.4, 3.5	Bölüm 3.5, 3.6
6	SINAV	Bölüm 4.1, 4.2, 4.3	Bölüm 4.3, 4.4, 4.5*
7	Bölüm 5.1, 5.2, 5.3*	Bölüm 6.1	Bölüm 6.2 6.3*
8	Bölüm 7.1, 7.2*, 7.3, 7.4	Bölüm 8.1, 8.2	Bölüm 8.3
9	Bölüm 8.4	Bölüm 9.1, 9.2, 9.3*	Bölüm 10.1
10	Bölüm 10.1, 10.4*	Bölüm 10.2, 10.3	SINAV
11	Bölüm 11.1, 11.2	Bölüm 11.3, 11.4	Bölüm 11.5, 11.6
12	Bölüm 12.1	Bölüm 12.2	Bölüm 12.2
13	Bölüm 12.3, 12.4*	Bölüm 12.5	Bölüm 12.5, 12.6*
14	Bölüm 14.1	Bölüm 14.2	Bölüm 14.3, 14.4*

Kitabın *tamamı* 4 kredilik bir derste veya olgun bir izleyici kitlesine hitap eden 3 kredilik bir derste işlenebilir.

Teşekkür. Bu kitabın ilk baskısını okuyarak geribildirim sunan Virginia Commonwealth Üniversitesi'ndeki MATH 300 kodlu dersin öğrencilerine teşekkür ederim. Basım hatalarını ve tutarsızlıkları bularak düzelten Cory Colbert ve Lauren Pace'e özel olarak teşekkür ederim. Web sayfasındaki nihai taslağı yayınlamadan önce her bölümün taslak metnini okuyarak çok sayıda hatayı yakalayan Cory'ye özellikle minnettarım. Cory ayrıca bazı ilginç örnekleri önerdi, bazı çözümleri yazdı ve dizini oluşturdu. Bu kitaptan ders anlatırken birçok iyileştirme tavsiye eden Moa Apagodu, Sean Cox, Brent Cody ve Andy Lewis'e; üçüncü baskının prova baskısını okuyan John Ganci'ye teşekkür ederim. Dizgi alanında uzman olan ve isteğe bağlı yayım ile bu kitabın baskısını hayata geçiren Lon Mitchell'e minnettarım.

Hatalar ve eksiklikler konusunda benimle temasa geçen tüm dünyadaki sayısız okura teşekkür ederim. Bu, sizler sayesinde daha iyi bir kitap oldu.

Kısım I

Temel Kavramlar

ÜNİTE 1

Kümeler

Matematiğin tamamı kümelerle ifade edilebilir. Matematik bilgi düzeyiniz arttıkça, bu çok daha belirgin bir hâle gelecektir. Bunu hem bu derste hem de ileride alacağınız derslerde açık bir şekilde göreceksiniz. Kümeler teorisi, matematiksel yapıların tamamını ifade ve izah etmek için kullanılan mükemmel bir dildir.

1.1 Küme Kavramına Giriş

Küme, nesnelerden oluşan bir topluluktur. Bu topluluktaki nesnelere kümenin **elemanları** denir. Biz ağırlıklı olarak elemanları sayılar, noktalar, fonksiyonlar vb. birer matematiksel nesne olan kümelerle ilgileneceğiz.

Genel olarak bir küme, elemanları iki süslü parantez arasında virgüller ile ayrılıp listelenerek gösterilir. Örneğin $\{2,4,6,8\}$ topluluğu dört elemanlı bir kümedir. Bu kümenin elemanları $2,4,6$ ve 8 sayılarıdır. Bazı kümelerin sonsuz sayıda elemanı vardır. Örneğin bütün tamsayılardan oluşan

$$\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$$

topluluğunu ele alalım. Baştaki ve sondaki üç nokta, sayı örüntüsünün hem pozitif hem de negatif yönde sonsuza dek sürdüğünü belirtir. Sonsuz sayıda elemanı olan bir kümeye **sonsuz** küme, aksi hâlde **sonlu** küme denir.

Tamamen aynı elemanlardan oluşan iki küme **eşittir**. Örneğin elemanları farklı şekilde sıralanmış olsa da $\{2,4,6,8\}=\{4,2,8,6\}$ olur çünkü bu kümelerin elemanları aynıdır. Diğer taraftan $\{2,4,6,8\}\neq\{2,4,6,7\}$. Ayrıca

$$\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}=\{0,-1,1,-2,2,-3,3,-4,4,\ldots\}.$$

Kümeleri genellikle büyük harflerle temsil ederiz. Örneğin $\{2,4,6,8\}$ kümesinden bahsederken, $A=\{2,4,6,8\}$ olduğunu bildirir ve sonrasında $\{2,4,6,8\}$ yerine A kullanabiliriz. A kümesinin 2 elemanına sahip olduğunu belirtmek için $2\in A$ yazar ve bunu *"2 tamsayısı A kümesinin bir elemanıdır"* veya *"2 eleman A"* ya da kısaca *"2, A'dadır"* diye okuruz. Benzer şekilde $4\in A$, $6\in A$, $8\in A$ fakat $5\notin A$ yazabiliriz. Son ifadeyi *"5 tamsayısı A'nın bir elemanı değildir"* ya da *"5 eleman değil A"* diye okuruz. Ayrıca $6,2\in A$ veya $2,4,8\in A$ gibi ifadelerle, birçok nesnenin bir kümeye ait olduğunu belirtiriz.

Bazı kümeler o kadar önemlidir ki onlar için özel semboller kullanılır. **Doğal sayılar** (yani pozitif tamsayılar) kümesi bunlardan biridir. Bu küme $\mathbb{N}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}.$$

Önemli olan kümelerden başka biri de

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$$

ile verilen **tamsayılar** kümesidir. Analiz derslerinden size kuşkusuz bir şekilde tanıdık gelecek olan **reel (gerçel) sayılar** kümesini $\mathbb{R}$ sembolü temsil eder. Diğer özel kümelere bu bölümde daha sonra yer verilecektir.

Kümelerin elemanları sadece sayılar olmak zorunda değildir. Örneğin $B = \{D,Y\}$ kümesi iki tane harften oluşur. Bu harfler "doğru" ve "yanlış" değerlerini temsil edebilir. $C = \{a,e,i,o,u\}$ kümesi, İngiliz alfabesinin küçük sesli harflerinden oluşur. $D = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ kümesinin elemanları, xy−koordinat düzlemindeki bir karenin köşe noktalarıdır. Burada $(0,0) \in D$, $(1,0) \in D$ fakat örneğin $(1,2) \notin D$ olur. Ayrıca elemanları başka kümeler olan kümeler bile olabilir. Örneğin $E = \{1,\{2,3\},\{2,4\}\}$ kümesinin üç elemanı vardır: 1 sayısı, $\{2,3\}$ kümesi ve $\{2,4\}$ kümesi. Buna göre $1 \in E$, $\{2,3\} \in E$ ve $\{2,4\} \in E$ olur. Fakat $2 \notin E$, $3 \notin E$ ve $4 \notin E$ olduğuna dikkat edilmelidir.

İki-çarpı-iki tipindeki üç matristen oluşan $M = \{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]\}$ kümesi için $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right] \in M$ fakat $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right] \notin M$ olur. Bu kümenin elemanları harflerle temsil edilebilir. Eğer $a = \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ ve $c = \left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ dersek $M = \{a,b,c\}$ yazılabilir.

Sonlu bir X kümesinin eleman sayısı $|X|$ ile gösterilir. Bu sayıya kümenin **kardinalitesi** denir. Yukarıda verilen kümeler için $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$, $|D| = 4$, $|E| = 3$ ve $|M| = 3$ olduğu görülebilir.

Küçük olmasına rağmen çok büyük bir rol oynayan özel bir küme vardır. **Boş küme**, hiçbir elemanı olmayan kümedir. Bu küme $\emptyset$ ile gösterilir. Yani $\emptyset = \{\}$. Dolayısıyla $\emptyset$ sembolü her zaman $\{\}$ anlamına gelir. Dikkat edilirse $|\emptyset| = 0$ olur. Aslında kardinalitesi sıfır olan tek küme boş kümedir.

Boş küme yazılırken dikkat edilmeli ve $\emptyset$ yazmak isterken, yerine $\{\emptyset\}$ yazılmamalıdır. Bu iki küme eşit olmaz çünkü $\emptyset$ hiçbir nesne içermez ancak $\{\emptyset\}$ kümesi bir tane nesneyi yani boş kümeyi içerir. Eğer kafanız karıştıysa kümeleri, içerisinde nesneler olan kutular olarak düşünebilirsiniz. Örneğin $\{2,4,6,8\}$ kümesi, içerisinde dört tane sayı olan bir "kutudur." Bu bağlamda $\emptyset = \{\}$, bir boş kutudur. Buna karşılık $\{\emptyset\}$, içinde boş kutu olan bir kutudur. Bu ikisi arasındaki fark açıktır: Boş kutu, içerisinde boş kutu olan bir kutudan farklıdır. Bu nedenle $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ olur. (Dikkat edilirse $|\emptyset| = 0$ ve $\left|\{\emptyset\}\right| = 1$ olması, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ olmasının başka bir kanıtıdır.)

Kümeleri kutulara benzetmek faydalı olabilir. Örneğin $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ kümesi ilk bakışta garip görünse de bu gerçekten basit bir kümedir. Bu küme, şu üç nesneyi içeren bir kutu olarak düşünülebilir: boş kutu, boş kutu içeren bir kutu ve boş kutu içeren bir kutuyu içeren başka bir kutu. Bu nedenle $|F| = 3$ olur. Öbür yandan $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ kümesi, doğal sayılar kutusunu ve tamsayılar kutusunu içeren bir kutudur. Böylelikle $|G| = 2$ olur.

İki süslü parantez arasında listelenemeyecek kadar büyük veya karmaşık olan kümeleri belirtmek için **ortak özellik yöntemi** adı verilen özel bir gösterim kullanılır. Örneğin $Ç = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ile verilen çift tamsayılar kümesini ele alalım. Bu küme, ortak özellik yöntemiyle

$$Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

biçiminde yazılır. Buradaki iki nokta işareti *"formundaki tüm elemanlardan oluşur öyle ki"* diye okunur. Buna göre $Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde verilen ifade *"Ç kümesi, 2n formundaki tüm elemanlardan oluşur öyle ki n eleman $\mathbb{Z}$'dir."* diye okunur.

Ortak özellik yöntemiyle yazılan bir X kümesi genel olarak

$$X = \{\text{ifade} : \text{kural}\}$$

formundadır. Bu gösterime göre X kümesinin elemanları "kural" ile belirtilen tüm "ifade" değerlerinden oluşur. Örneğin yukarıda verilen $Ç$ kümesi, $n \in \mathbb{Z}$ kuralını sağlayan $2n$ formundaki tüm ifade değerlerinin kümesidir. Bir kümeyi ifade etmenin birçok yolu olabilir. Örneğin, $Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \text{ çift tamsayı}\} = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Yaygın olan başka bir gösterim de

$$Ç = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ çift}\}$$

biçimindedir. Bu gösterim *"Ç kümesi, $n \in \mathbb{Z}$'lerden oluşur öyle ki n çifttir."* diye okunur. Bazı yazarlar, $Ç = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ çift}\}$ örneğinde olduğu gibi iki nokta yerine düz çizgi kullanır. Ancak biz iki nokta kullanımına bağlı kalacağız.

Örnek 1.1 Aşağıda, ortak özellik yöntemiyle ilgili örnekler verilmiştir.

1. $\{n : n \text{ bir asal sayı}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ asal}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
3. $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
5. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$
6. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
7. $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
8. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Son üç örnek, daima dikkat edilmesi gereken bir notasyon karmaşasına dikkat çeker: $|X|$ ifadesi, X bir sayı ise *mutlak değer* fakat X bir küme ise *kardinalite* anlamına gelir. Aralarındaki fark, konu içeriğinden belli olur. Örnek 1.1 (6)'daki $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$ kümesinde $x \in \mathbb{Z}$ olduğu için x bir sayıdır. Bu nedenle $|x|$ ifadesi mutlak değer anlamına gelir. Yani kardinalite değildir. Buna karşılık $A = \{\{1,2\},\{3,4,5,6\},\{7\}\}$ ve $B = \{X \in A : |X| < 3\}$ kümelerini göz önüne alalım. A kümesinin elemanları (sayılar değil) kümelerdir. Bu nedenle B kümesini ortak özellik yöntemiyle belirtirken kullanılan $|X|$ ifadesi kardinalite anlamına gelmelidir. Böylelikle $B = \{\{1,2\},\{7\}\}$ olur.

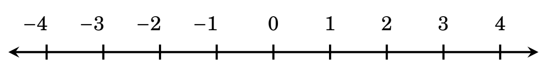
Örnek 1.2 $A = \{7a + 3b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesini tarif ediniz.

Çözüm: Bu küme, a ve b iki tamsayı olmak üzere, $7a + 3b$ formundaki tüm sayılardan oluşur. Üstelik $7a + 3b$ bir tamsayı olduğu için A sadece tamsayıları içerir. Ancak *hangi* tamsayıları? Eğer n herhangi bir tamsayı ise $n = 7n + 3(-2n)$ olduğu için $a = 7n$ ve $b = -2n$ seçilerek $n = 7a + 3b$ yazılabilir. Buna göre $n \in A$ olur. Sonuç olarak A kümesinin sadece tamsayılardan oluştuğunu ve aynı zamanda bütün tamsayıları da içerdiğini göstermiş olduk. O hâlde $A = \mathbb{Z}$ olmalıdır.

Bu bölümü, çok yaygın olarak kullanılan kümelerin bir özetiyle bitirelim. Bu kümeler öyle yaygındır ki her birinin özel bir adı ve sembolü vardır.

- Boş küme: $\emptyset = \{\}$
- Doğal sayılar: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$
- Tamsayılar: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}$
- Rasyonel sayılar: $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \dfrac{m}{n}, m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
- Reel sayılar: $\mathbb{R}$

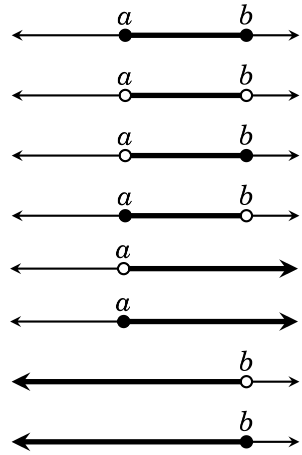
Reel sayılar kümesini, sonsuz uzunluklu sayı doğrusu olarak düşünebiliriz.



Rasyonel sayılar, iki tamsayının birbirine oranı olarak yazılabilen tüm reel sayıların kümesidir. Muhtemelen, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ama $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ olduğu için $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ olduğunun farkındasınızdır. (Değilseniz, bu konu Ünite 6'da ele alınacaktır.)

Sayı doğrusu üzerindeki aralıkları analiz dersleriden bilirsiniz. Bu aralıklar, reel sayıların kendisi gibi sonsuz elemanlı sayı kümeleridir. Aslında $a < b$ koşuluyla verilen $a, b \in \mathbb{R}$ ile birçok aralık oluşturulabilir. Bu aralıklar şekilsel olarak a ile b arasındaki koyu renkli doğru parçalarıyla temsil edilir. Aralığın uç noktasındaki içi dolu daire, o noktanın aralığa dahil edildiğini gösterir. Boş bir daire ise aralığa dahil edilmeyen uç noktasını temsil eder.

- Kapalı aralık: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
- Açık aralık: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- Yarı açık aralık: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$
- Yarı açık aralık: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$
- Sonsuz aralık: $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- Sonsuz aralık: $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$
- Sonsuz aralık: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- Sonsuz aralık: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$



Bu aralıkların her biri, sonsuz çoklukta eleman (yani sayı) içeren sonsuz birer kümedir. Örneğin, uzunluğu kısa olmasına rağmen $(\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$ aralığı sonsuz çoklukta sayı içerir. Bu sayılar $\frac{1}{10} = 0,1$ ile $\frac{2}{10} = 0,2$ arasındaki tüm sayılarıdır. Maalesef (a,b) sembolü, sayı doğrusu üzerindeki bir aralığın yanı sıra, düzlem üzerindeki bir noktayı temsil etmek için de kullanılır. Bu ikisi arasındaki fark genellikle konu içeriğinden anlaşılır. Bir sonraki bölümde (a,b) sembolüne başka bir anlam daha yükleyeceğiz.

Bölüm 1.1 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki kümeleri listeleme yöntemini kullanarak yeniden yazınız.

1. $\{5x-1 : x \in \mathbb{Z}\}$

2. $\{3x+2 : x \in \mathbb{Z}\}$

3. $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \le x < 7\}$

4. $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \le 7\}$

5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$

6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$

7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$

8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6x\}$

9. $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$

10. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$

11. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$

12. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$

13. $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$

14. $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \le 8\}$

15. $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

16. $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Aşağıdaki kümeleri ortak özellik yöntemini kullanarak yeniden yazınız.

17. $\{2,4,8,16,32,64,\ldots\}$

18. $\{0,4,16,36,64,100,\ldots\}$

19. $\{\ldots,-6,-3,0,3,6,9,12,15,\ldots\}$

20. $\{\ldots,-8,-3,2,7,12,17,\ldots\}$

21. $\{0,1,4,9,16,25,36,\ldots\}$

22. $\{3,6,11,18,27,38,\ldots\}$

23. $\{3,4,5,6,7,8\}$

24. $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$

25. $\{\ldots,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,\ldots\}$

26. $\{\ldots,\frac{1}{27},\frac{1}{9},\frac{1}{3},1,3,9,27,\ldots\}$

27. $\{\ldots,-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\frac{5\pi}{2},\ldots\}$

28. $\{\ldots,-\frac{3}{2},-\frac{3}{4},0,\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{9}{4},3,\frac{15}{4},\frac{9}{2},\ldots\}$

C. Aşağıdaki kardinaliteleri hesaplayınız.

29. $\left|\{\{1\},\{2,\{3,4\}\},\emptyset\}\right|$

30. $\left|\{\{1,4\},a,b,\{\{3,4\}\},\{\emptyset\}\}\right|$

31. $\left|\{\{\{1\},\{2,\{3,4\}\},\emptyset\}\}\right|$

32. $\left|\{\{\{1,4\},a,b,\{\{3,4\}\},\{\emptyset\}\}\}\right|$

33. $\left|\{x\in\mathbb{Z}:|x|<10\}\right|$

34. $\left|\{x\in\mathbb{N}:|x|<10\}\right|$

35. $\left|\{x\in\mathbb{Z}:x^2<10\}\right|$

36. $\left|\{x\in\mathbb{N}:x^2<10\}\right|$

37. $\left|\{x\in\mathbb{N}:x^2<0\}\right|$

38. $\left|\{x\in\mathbb{N}:5x\le 20\}\right|$

D. Aşağıda verilen noktaların kümesini xy−düzlemi üzerinde çiziniz.

39. $\{(x,y):x\in[1,2],y\in[1,2]\}$

40. $\{(x,y):x\in[0,1],y\in[1,2]\}$

41. $\{(x,y):x\in[-1,1],y=1\}$

42. $\{(x,y):x=2,y\in[0,1]\}$

43. $\{(x,y):|x|=2,y\in[0,1]\}$

44. $\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$

45. $\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2=1\}$

46. $\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2\le 1\}$

47. $\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},y\ge x^2-1\}$

48. $\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},x>1\}$

49. $\{(x,x+y):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{Z}\}$

50. $\{(x,\frac{x^2}{y}):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{N}\}$

51. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(y-x)(y+x)=0\}$

52. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(y-x^2)(y+x^2)=0\}$

1.2 Kartezyen Çarpım

A ve B kümeleri verilsin. Bu kümeler "çarpılarak" $A\times B$ ile gösterilen yeni bir küme oluşturulabilir. Bu işlem, *kartezyen çarpım* olarak adlandırılır. Bunu anlamak için öncelikle sıralı ikili kavramını bilmek gerekir.

> **Tanım 1.1** **Sıralı ikili**, x ve y gibi iki nesnenin parantez içine alınıp virgül ile ayrılmasıyla elde edilen (x,y) ifadesidir.

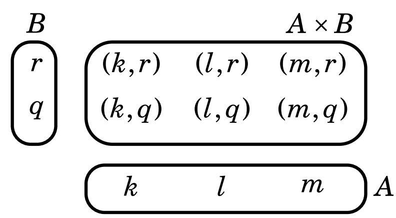
Örneğin $(2,4)$ ve $(4,2)$ birer sıralı ikilidir. Aynı sayılardan oluşmalarına rağmen bu ikililer farklıdır çünkü sayıların sırası farklıdır. Bu yüzden $(2,4)\neq(4,2)$ yazılır. Bu noktada, analiz dersinde yapıldığı gibi, sıralı ikililerin düzlemdeki noktaları belirtmek için kullanılabileceğini görebilirsiniz. Ancak sıralı ikililerin kullanımı sadece bununla sınırlı değildir. Sıralı ikililerin bileşenleri birer sayı olmak zorunda değildir. Örneğin (l,m) sıralı ikilisinin bileşenleri birer harftir; $(\{2,5\},\{3,2\})$ sıralı ikilisinin bileşenleri birer kümedir. Hatta $((2,4),(4,2))$ bile bir sıralı iklidir. Ayrıca $(2,\{1,2,3\})$ ve $(\mathbb{R},(0,0))$ ifadeleri de birer sıralı ikilidir. Parantez içinde listelenen iki bileşen daima bir sıralı ikili belirtir. Artık kartezyen çarpımı tanımlayabiliriz.

> **Tanım 1.2** A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı**, $A\times B$ ile gösterilen ve $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ biçiminde tanımlanan başka bir kümedir.

Bu tanıma göre $A \times B$ kümesi, bileşenleri A ve B kümelerinden gelen sıralı ikililerin kümesidir. Örneğin $A = \{k, l, m\}$ ve $B = \{q, r\}$ ise

$$A \times B = \{(k,q),(k,r),(l,q),(l,r),(m,q),(m,r)\}$$

olur. Şekil 1.1'de, $A \times B$ için kaba taslak bir diyagramın nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. İlk önce, sanki x ve y−eksenleriymiş gibi, A'nın elemanları yatay; B'nin elemanları düşey olarak sıralanır. Daha sonra x sütununa ve y satırına (x, y) sıralı ikilisi gelecek şekilde diyagram doldurulur.

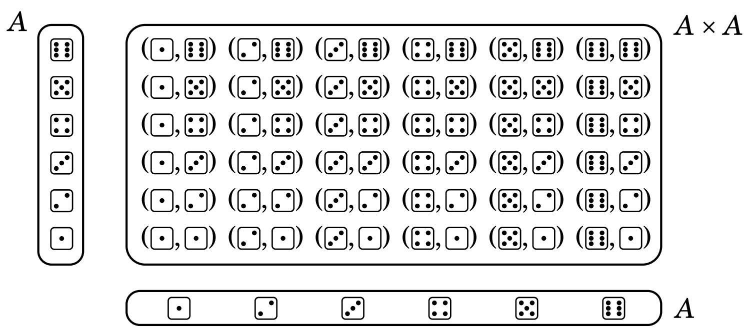


Şekil 1.1: Kartezyen çarpım diyagramı

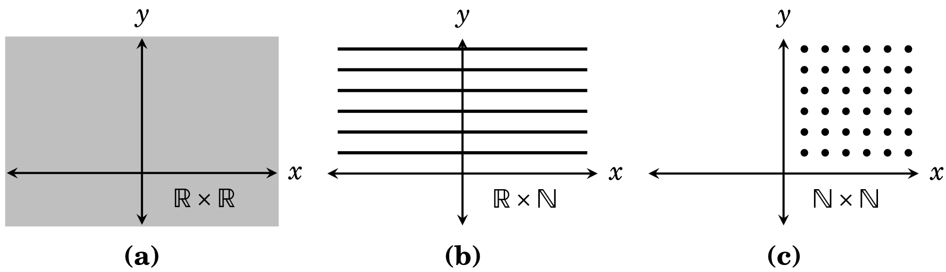
Başka bir örnek olarak $\{0,1\} \times \{2,1\} = \{(0,2),(0,1),(1,2),(1,1)\}$ verilebilir. Görsel olarak düşünmek isterseniz, Şekil 1.1'dekine benzer bir diyagram çizebilirsiniz. Bu tarz diyagramlardaki dikdörtgensel dizilim, aşağıdaki gözlemi yapma fırsatı verir.

Gözlem 1.1 Eğer A ve B kümeleri sonlu ise $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ olur.

Örnek 1.3 Bir zarın altı yüzünden oluşan $A = \{$⚀,⚁,⚂,⚃,⚄,⚅$\}$ kümesi verilsin. $A \times A$ kümesine ait diyagram aşağıda verilmiştir. Gözlem 1.1'den (veya doğrudan sayarak) $|A \times A| = 6 \cdot 6 = 36$ olduğu görülebilir. $A \times A$ kümesi, bir zarı art arda iki kez atma deneyinin olası sonuçları olarak düşünülebilir. Kartezyen çarpımın her bir elemanı (1. deney sonucu, 2. deney sonucu) formundadır. Bu tür yapılar olasılık teorisinde oldukça kullanışlıdır.



Hepiniz, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesini az çok bilirsiniz. Bu küme, Şekil 1.2(a)'da olduğu gibi kartezyen düzlemdeki bütün noktaların kümesi olarak görülebilir. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}\}$ kümesi, y−koordinatı bir doğal sayı olan noktaların kümesidir. Şekil 1.2(b)'de gösterilen bu küme, x−eksinine olan uzaklığı birer doğal sayı olan sonsuz sayıdaki yatay doğrulardan oluşur. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise koordinatları birer doğal sayı olan noktaların kümesidir. Bu küme, Şekil 1.2(c)'de gösterildiği gibi, birinci bölgedeki bir ızgaranın köşelerine yerleştirilmiş noktaların kümesine benzer.



Şekil 1.2: Çeşitli kartezyen çarpım kümeleri

Kartezyen çarpımı alınan kümelerden birisi, kendi başına bir kartezyen çarpım olabilir. Örneğin, $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \{(x, (y, z)) : x \in \mathbb{R}, (y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$.

Sıralı ikililerin ötesine geçerek, üç ya da daha fazla kümenin kartezyen çarpımını alabiliriz. **Sıralı üçlü**, (x, y, z) şeklindeki bir listedir. Örneğin $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri için $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}\}$ olur. Bu tanımı sıralı üçlülerde sonlandırmak için herhangi bir neden yoktur. Genellersek,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{her } i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x_i \in A_i\}.$$

Parantez kullanımına dikkat edilmelidir. Örneğin $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ ve $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ arasında küçük bir fark vardır. İlk küme, iki tane kümenin kartezyen çarpımıdır ve elemanları $(x, (y, z))$ formundaki sıralı ikililerdir. İkinci küme, üç tane kümenin kartezyen çarpımdır ve elemanları (x, y, z) sıralı üçlüleridir. Birçok durumda $(x, (y, z))$ ve (x, y, z) gibi ifadeler arasındaki ayrımı gözardı etmenin bir sakıncası yoktur. Şimdilik onların farklı olduklarını düşünelim.

Pozitif bir n tamsayısı verilsin. Bir A kümesinin **kartezyen kuvveti**

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma göre; aşina olduğumuz düzlem $\mathbb{R}^2$, üç boyutlu uzay ise $\mathbb{R}^3$ olur. $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ düzlemideki bir ızgaranın köşelerine yerleştirilmiş noktaların kümesidir. $\mathbb{Z}^3 = \{(m, n, p) : m, n, p \in \mathbb{Z}\}$ ise $\mathbb{R}^3$ uzayını kaplayan 3−boyutlu sonsuz ızgaranın köşe noktalarıdır.

Diğer derslerde, $\mathbb{R}^n$ kümesine çok benzeyen ancak biraz daha farklı anlama sahip kümelerle karşılaşabilirsiniz. Örneğin, bileşenleri reel sayılar olan iki-çarpı-üç tipindeki bütün matrislerin kümesini göz önüne alalım:

$$M = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{smallmatrix}\right] : u,v,w,x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bu küme gerçekten de aşağıda verilen $\mathbb{R}^6$ kümesinden çok farklı değildir:

$$\mathbb{R}^6 = \left\{ (u,v,w,x,y,z) : u,v,w,x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bu iki kümenin elemanları, altı tane sayının farklı biçimde dizilmelerinden oluşur. Bu benzerliğe rağmen $M \neq \mathbb{R}^6$ yani iki-çarpı-üç tipindeki matrislerin sıralı altılılardan farklı olduğunu kabul edeceğiz.

Örnek 1.4 Bir madeni paranın iki yüzünü $S = \{\mathrm{Y}, \mathrm{T}\}$ ile temsil edelim. Bu parayı yedi defa art arda atma deneyinin olası sonuçları S^7 kartezyen çarpım kümesi ile temsil edilebilir. Aslında S^7 kümesinin tipik bir elemanı

$$(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}, \mathrm{T}, \mathrm{Y}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T})$$

formundadır. Bu deneyde; madeni para sırasıyla yazı, yazı, tura, yazı, tura, tura, tura gelmiştir. Dikkat edilirse $|S^7| = 2^7 = 128$ olduğu için 128 tane olası sonuç vardır. Bu çok açık değilse Ünite 3'te uzun uzadıya açıklanacaktır.

Bölüm 1.2 Alıştırmaları

A. Aşağıda belirtilen kümeleri listeleme yöntemiyle yazınız.

1. $A = \{1,2,3,4\}$ ve $B = \{a,c\}$ olsun.

(a) $A \times B$	(c) $A \times A$	(e) $\emptyset \times B$	(g) $A \times (B \times B)$
(b) $B \times A$	(d) $B \times B$	(f) $(A \times B) \times B$	(h) B^3

2. $A = \{\pi, e, 0\}$ ve $B = \{0,1\}$ olsun.

(a) $A \times B$	(c) $A \times A$	(e) $A \times \emptyset$	(g) $A \times (B \times B)$
(b) $B \times A$	(d) $B \times B$	(f) $(A \times B) \times B$	(h) $A \times B \times B$

3. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{a,c,e\}$

4. $\{n \in \mathbb{Z} : 2 < n < 5\} \times \{n \in \mathbb{Z} : |n| = 5\}$

5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\}$

6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\} \times \{x \in \mathbb{N} : x^2 = x\}$

7. $\{\emptyset\} \times \{0, \emptyset\} \times \{0,1\}$

8. $\{0,1\}^4$

B. Aşağıdaki kartezyen çarpımları $\mathbb{R}^2$ (son ikisini $\mathbb{R}^3$) üzerinde çiziniz.

9. $\{1,2,3\} \times \{-1,0,1\}$

10. $\{-1,0,1\} \times \{1,2,3\}$

11. $[0,1] \times [0,1]$

12. $[-1,1] \times [1,2]$

13. $\{1, 1.5, 2\} \times [1,2]$

14. $[1,2] \times \{1, 1.5, 2\}$

15. $\{1\} \times [0,1]$

16. $[0,1] \times \{1\}$

17. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

18. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

19. $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

20. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \times [0,1]$

1.3 Altkümeler

Bir A kümesindeki her eleman, başka bir B kümesine ait olabilir. Örneğin $A = \{0,2,4\}$ kümesinin her elemanı $B = \{0,1,2,3,4\}$ kümesinin de elemanıdır. A ile B bu şekilde ilişkilendirildiğinde A kümesine B'nin bir *altkümesi* denir.

Tanım 1.3 A ve B iki küme olsun. Eğer A'nın her elemanı B'nin de bir elemanı ise A kümesi B'nin bir **altkümesidir** deriz ve $A \subseteq B$ yazarız. Eğer A kümesi B'nin bir altkümesi *değil* yani A'nın bazı elemanları B'ye ait değil ise $A \not\subseteq B$ yazarız. Böylelikle $A \not\subseteq B$ ifadesi, A'da olan ama B'de *olmayan* en az bir elemanın var olması anlamına gelir.

Örnek 1.5 Aşağıdakilerin niçin doğru olduğunu anladığınıza emin olunuz.

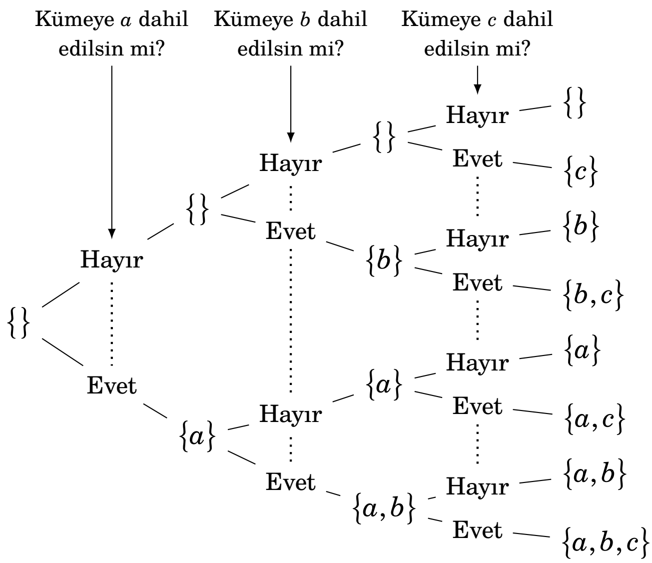
1. $\{2,3,7\} \subseteq \{2,3,4,5,6,7\}$
2. $\{2,3,7\} \not\subseteq \{2,4,5,6,7\}$
3. $\{2,3,7\} \subseteq \{2,3,7\}$
4. $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
5. $\{1,3,5,7,11,13,17,\ldots\} \subseteq \mathbb{N}$
6. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
7. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
8. Her A kümesi için $A \subseteq A$.
9. $\emptyset \subseteq \emptyset$

Bu noktada, oldukça önemli bir gözlem yapabiliriz: B hangi küme olursa olsun $\emptyset \subseteq B$ olur. Bunun neden doğru olduğunu görmek için Tanım 1.3'ün son cümlesine bakalım: $\emptyset \not\subseteq B$ ifadesi, $\emptyset$'de olan ancak B'de olmayan en az bir elemanın var olması anlamına gelir. Fakat böyle bir şey olamaz çünkü $\emptyset$ hiç eleman içermez! O hâlde $\emptyset \not\subseteq B$ ifadesi doğru değildir. Yani $\emptyset \subseteq B$ olmalıdır.

Gözlem 1.2 Boş küme her kümenin altkümesidir. Bir başka deyişle, her B kümesi için $\emptyset \subseteq B$ olur.

Buna başka bir açıdan şöyle bakabiliriz. B'nin bir altkümesini; $\{\}$ süslü parantezlerini alıp, bunun içini B'den seçilen elemanlarla doldurduğumuz bir kutu olarak düşünelim. Örneğin $B = \{a,b,c\}$ olsun. Eğer $\{\}$ ile başlar ve bunun içinine b ve c elemanlarını koyarsak $\{b,c\}$ altkümesini oluştururuz. Alternatif olarak sadece a elemanını koyarsak $\{a\}$ altkümesini oluşturur ve benzeri şekilde devam edebiliriz. Buradaki seçeneklerden biri de B'den hiçbir eleman koymamaktır. Bu bizi $\{\}$ altkümesi ile baş başa bırakır. Yani $\{\} \subseteq B$ olur. Genel olarak bunu $\emptyset \subseteq B$ şeklinde yazarız.

Altkümeleri bu şekilde "oluşturma" yöntemi, bir kümenin bütün altkümelerini listelemek için kullanılabilir. Örneğin $B = \{a, b, c\}$ kümesinin tüm altkümelerini yazalım. Bunun için ağaca benzeyen bir yapı oluşturabiliriz. Şekil 1.3'ün en solunda gösterildiği gibi $\{\}$ ile başlayalım. B'den a elemanını seçelim. Bu elemanı $\{\}$'ye dahil edebiliriz veya etmeyebiliriz. Yapacağımız seçime göre, $\{\}$'den başlayan doğrular $\{\}$ veya $\{a\}$ kümesini işaret eder. Şimdi b elemanına geçelim. Bu elemanı biraz önce oluşturduğumuz kümelere dahil edebiliriz veya etmeyebiliriz. Diyagram üzerindeki doğrular, yapılacak seçime göre $\{\}$, $\{b\}$, $\{a\}$ veya $\{a, b\}$ kümelerini işaret eder. Son olarak, bu kümelere c elemanını dahil edebiliriz veya etmeyebiliriz. Böylece diyagramın en sağında yer alan $\{\}$, $\{c\}$, $\{b\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ ve $\{a, b, c\}$ kümelerini elde ederiz. Bunlar, $B = \{a, b, c\}$ kümesinin sekiz adet altkümesidir.



Şekil 1.3: Altkümeleri listelemek için kullanılan bir "ağaç"

Bu ağacın dallanma biçiminden görüleceği üzere eğer $B = \{a\}$ olsaydı B kümesinin sadece iki tane altkümesi olurdu ki bunlar diyagramın ikinci sütunundaki altkümelerdir. Eğer $B = \{a, b\}$ olsaydı B kümesinin dört tane altkümesi olurdu ki bunlar diyagramın üçüncü sütunundaki altkümelerdir. Dikkat edilirse ağaç her dal verdiğinde altkümelerin sayısı iki katına çıkar. Sonuç olarak $|B| = n$ ise B kümesinin 2^n tane altkümesi olmalıdır.

Gözlem 1.3 Eğer sonlu bir kümenin n tane elmanı var ise o kümenin 2^n tane altkümesi vardır.

Biraz daha karmaşık bir örnek için $B = \{1,2,\{1,3\}\}$ kümesinin tüm altkümelerini listeleyelim. Bu kümenin üç tane elemanı vardır: 1, 2 ve $\{1,3\}$. Bu noktada, altkümeleri yazmak için bir ağaç çizmek bile gerekmez. Elemanlar arasından olası tüm seçimleri yapar ve bunları süslü parantez içine alırsak

$$\{\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{\{1,3\}\},\ \{1,2\},\ \{1,\{1,3\}\},\ \{2,\{1,3\}\},\ \{1,2,\{1,3\}\}$$

kümelerini elde ederiz. Bu sekiz küme, B'nin tüm altkümeleridir. Bu tip alıştırmalar, bir altkümenin ne olup ne olmadığını anlamanıza yardım eder. Örneğin hemen farkına varacağınız üzere $\{1,3\}$ kümesi B'nin bir altkümesi *değildir* çünkü 3 tamsayısı B kümesine ait değildir. Bu nedenle B'den elemanlar seçilerek bu küme oluşturulamaz. Oysaki, $\{1,3\} \not\subseteq B$ olmasına rağmen $\{1,3\} \in B$ ifadesi *doğrudur*. Ayrıca $\{\{1,3\}\} \subseteq B$ olduğu görülebilir.

Örnek 1.6 Aşağıdaki önermelerin niçin doğru olduklarını anladığınızdan emin olunuz. Bunların her biri, kümeler teorisinin şu ana kadar öğrendiğiniz bir kısmıyla ilgilidir.

1. $1 \in \{1,\{1\}\}$ .... 1 tamsayısı, $\{1,\{1\}\}$'de listelenen ilk elemandır.
2. $1 \not\subseteq \{1,\{1\}\}$ .... çünkü 1 küme değildir.
3. $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$ .... $\{1\}$ elemanı, $\{1,\{1\}\}$'de listelenen ikinci elemandır.
4. $\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$ .... $\{1,\{1\}\}$'den 1 elemanı seçilip $\{1\}$ altkümesi oluşturulur.
5. $\{\{1\}\} \notin \{1,\{1\}\}$ .... 1 ve $\{1\}$ elemanları $\{1,\{1\}\}$'dedir ama $\{\{1\}\}$ değildir.
6. $\{\{1\}\} \subseteq \{1,\{1\}\}$ .... $\{1,\{1\}\}$'den $\{1\}$ seçilerek $\{\{1\}\}$ altkümesi oluşturulur.
7. $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ .... $\mathbb{N}$ bir kümedir (sayı değildir) ve sadece sayıları içerir.
8. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ .... çünkü her X kümesi $X \subseteq X$ şartını sağlar.
9. $\emptyset \notin \mathbb{N}$ .... çünkü $\mathbb{N}$ sadece sayıları içerir, kümeleri içermez.
10. $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
11. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü $\{\mathbb{N}\}$, sadece $\mathbb{N}$ elemanından oluşan kümedir.
12. $\mathbb{N} \not\subseteq \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü, örneğin, $1 \in \mathbb{N}$ fakat $1 \notin \{\mathbb{N}\}$ olur.
13. $\emptyset \notin \{\mathbb{N}\}$ .... $\{\mathbb{N}\}$ kümesinin tek elemanı $\mathbb{N}$'dir ve $\mathbb{N} \neq \emptyset$'dir.
14. $\emptyset \subseteq \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
15. $\emptyset \in \{\emptyset,\mathbb{N}\}$ .... $\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ kümesinde listelenen ilk eleman $\emptyset$'dir.
16. $\emptyset \subseteq \{\emptyset,\mathbb{N}\}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
17. $\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\emptyset,\mathbb{N}\}$ .... $\{\emptyset,\mathbb{N}\}$'den $\mathbb{N}$ seçilerek $\{\mathbb{N}\}$ altkümesi oluşturulur.
18. $\{\mathbb{N}\} \not\subseteq \{\emptyset,\{\mathbb{N}\}\}$ .... çünkü $\mathbb{N} \notin \{\emptyset,\{\mathbb{N}\}\}$'dir.
19. $\{\mathbb{N}\} \in \{\emptyset,\{\mathbb{N}\}\}$ .... $\{\emptyset,\{\mathbb{N}\}\}$ kümesinde listelenen ikinci eleman $\{\mathbb{N}\}$'dir.
20. $\{(1,2),(2,2),(7,1)\} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ .... $(1,2),(2,2),(7,1)$ elemanlarının hepsi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'dedir.

Altküme kavramını anlamanıza yardımcı olan yukarıdaki örnekler biraz yapaydır. Genellikle altkümeler doğal bir şekilde ortaya çıkar. Örneğin $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberini göz önüne alalım. Bu küme, $\mathbb{R}^2$

düzleminin bir altkümesidir. Benzer şekilde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ ile verilen noktalar kümesidir ve $G \subseteq \mathbb{R}^2$ olur. C ve G gibi kümeler, $\mathbb{R}^2$'nin birer altkümesi olarak düşünüldüğü zaman daha kolay anlaşılır veya zihinde canlandırılır. Matematik, bir kümeyi başka bir kümenin altkümesi olarak görmenin önemli olduğu örneklerle doludur.

Bölüm 1.3 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki kümelerin tüm altkümelerini yazınız.

1. $\{1,2,3,4\}$

2. $\{1,2,\emptyset\}$

3. $\{\{\mathbb{R}\}\}$

4. $\emptyset$

5. $\{\emptyset\}$

6. $\{\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{N}\}$

7. $\{\mathbb{R},\{\mathbb{Q},\mathbb{N}\}\}$

8. $\{\{0,1\},\{0,1,\{2\}\},\{0\}\}$

B. Aşağıdaki kümeleri listeleme yöntemiyle ifade ediniz.

9. $\{X : X \subseteq \{3,2,a\}$ ve $|X| = 2\}$

10. $\{X \subseteq \mathbb{N} : |X| \leq 1\}$

11. $\{X : X \subseteq \{3,2,a\}$ ve $|X| = 4\}$

12. $\{X : X \subseteq \{3,2,a\}$ ve $|X| = 1\}$

C. Aşağıdaki ifadeler doğru mudur yoksa yanlış mıdır? Açıklayınız.

13. $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

14. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

15. $\{(x,y) : x-1=0\} \subseteq \{(x,y) : x^2-x=0\}$

16. $\{(x,y) : x^2-x=0\} \subseteq \{(x,y) : x-1=0\}$

1.4 Kuvvet Kümesi

Yeni bir küme oluşturma yöntemlerinden biri de *kuvvet kümesi* işlemidir.

Tanım 1.4 Bir A kümesinin **kuvvet kümesi**, $\mathscr{P}(A)$ ile gösterilen ve A'nın tüm altkümelerinin kümesi olarak tanımlanan başka bir kümedir. Sembolik olarak $\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ yazılır.

Örneğin $A = \{1,2,3\}$ olsun. A kümesinin kuvvet kümesi, A'nın tüm altkümelerinin kümesidir. Önceki bölümde bu altkümelerin nasıl bulunacağını öğrendik. Bunlar $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ ve $\{1,2,3\}$ kümeleridir. Buna göre A'nın kuvvet kümesini yazabiliriz:

$$\mathscr{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Önceki bölümde gördüğümüz üzere n tane elemanı olan sonlu bir kümenin 2^n altkümesi vardır. Bu nedenle kuvvet kümesinin 2^n elemanı vardır.

Gözlem 1.4 Eğer A kümesi sonlu ise $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$ olur.

Örnek 1.7 Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz ve cevapların nasıl elde edildiğini anladığınızdan emin olunuz. Her durumda $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$ eşitliğinin doğru olduğuna özellikle dikkat ediniz.

1. $\mathscr{P}(\{0,1,3\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}\}$
2. $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
3. $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
4. $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
5. $\mathscr{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
6. $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
7. $\mathscr{P}(\{a\}) \times \mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{\emptyset\}), (\{a\},\emptyset), (\{a\},\{\emptyset\})\}$
8. $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{\emptyset\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
9. $\mathscr{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1,2\}\}, \{1,\{1,2\}\}\}$
10. $\mathscr{P}(\{\mathbb{Z},\mathbb{N}\}) = \{\emptyset, \{\mathbb{Z}\}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{Z},\mathbb{N}\}\}$

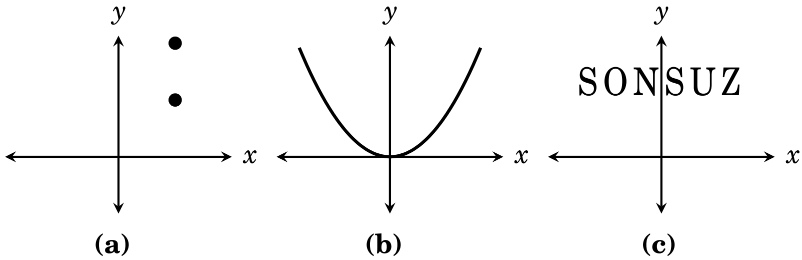
Sıradaki önermeler **yanlıştır**. Bunların neden yanlış olduğunu belirlemeye çalışarak sağ taraftaki açıklamaları anladığınızdan emin olunuz.

11. $\mathscr{P}(1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ .... anlamsızdır çünkü 1 küme değildir.
12. $\mathscr{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,\{1,2\}\}\}$ ...... yanlıştır çünkü $\{1,2\} \not\subseteq \{1,\{1,2\}\}$.
13. $\mathscr{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\emptyset,\{1,2\}\}\}$... yanlıştır çünkü $\{\{1\}\} \not\subseteq \{1,\{1,2\}\}$.

Eğer A sonlu ise, yukarıda yapıldığı gibi, $\mathscr{P}(A)$ kümesini listelemek mümkündür (ancak bu pratik olmayabilir). Eğer A sonsuz ise bu mümkün değildir. Örneğin $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarını yazmaya başladığınızda $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz sayıda altkümeye sahip olduğunu çok hızlı bir şekilde görebilirsiniz. Ancak bu altkümelerin hangi örüntüye göre sıralanacağı (ya da bunun mümkün olup olmadığı) belli değildir:

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{39,47\}, \\ \ldots, \{3,87,131\}, \ldots, \{2,4,6,8\}, \ldots ? \ldots\}.\end{aligned}$$

$\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ ise oldukça karmaşıktır. Bunu görmek için $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesini, kartezyen düzlemdeki tüm noktaların kümesi olarak düşünelim. Düzlem üzerindeki belirli noktaların kümesi, $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesidir. (Yani $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir *elemandır.*) Bunlardan bazılarına bakalım. $\{(1,2),(1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğu için $\{(1,2),(1,1)\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ olur. Şekil 1.4(a)'daki gibi bu altkümenin şeklini bile çizebiliriz. Başka bir örnek olarak $G = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesini yani $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini ele alalım. Bu da $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesidir. Yani $G \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ olur. Şekil 1.4(b), bu kümeyi gösterir. Bu iş herhangi bir fonksiyon için yapılabilir. O hâlde akla gelebilecek her $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği, $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir elemanıdır.



Şekil 1.4: Çok ama çok elemana sahip $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ kümesinin üç elemanı

Aslında, düzlemdeki siyah-beyaz herhangi bir resim $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesi olarak düşünülebilir. Buradaki siyah noktalar altkümeye dahildir fakat beyaz noktalar dahil değildir. Dolayısıyla Şekil 1.4(c)'de verilen "SONSUZ" yazısı da $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesidir ve bu nedenle $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir elemanıdır. Aynı sebepten dolayı $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ şu an okuduğunuz sayfanın bir kopyasını içerir.

Akla gelebilecek her fonksiyonu ve her siyah-beyaz resmi içermenin yanı sıra $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$; şu ana kadar yazılmış olan, yazılacak olan ve hiçbir zaman yazılmayacak olan kitapları içerir. $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ kümesinin içinde, hayatınızın başından sonuna kadar, sizin ve henüz daha doğmamış torunlarınızın detaylı biyografileri bulunmaktadır. Sadece beş tane sembol kullanılarak yazılan $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$'nin akıl almaz büyüklükte bir kümeyi ifade etmesi şaşırtıcıdır.

Ödev: $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{R}^2))$ kümesini hayal ediniz.

Bölüm 1.4 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki kümeleri listeleme yöntemiyle yazınız.

1. $\mathscr{P}\big(\{\{a,b\},\{c\}\}\big)$

2. $\mathscr{P}\big(\{1,2,3,4\}\big)$

3. $\mathscr{P}(\{\{\emptyset\},5\})$

4. $\mathscr{P}\big(\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\}\big)$

5. $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\{2\})\big)$

6. $\mathscr{P}\big(\{1,2\}\big)\times\mathscr{P}\big(\{3\}\big)$

7. $\mathscr{P}\big(\{a,b\}\big)\times\mathscr{P}\big(\{0,1\}\big)$

8. $\mathscr{P}\big(\{1,2\}\times\{3\}\big)$

9. $\mathscr{P}\big(\{a,b\}\times\{0\}\big)$

10. $\{X\in\mathscr{P}\big(\{1,2,3\}\big):|X|\le 1\}$

11. $\{X\subseteq\mathscr{P}\big(\{1,2,3\}\big):|X|\le 1\}$

12. $\{X\in\mathscr{P}\big(\{1,2,3\}\big):2\in X\}$

B. Kabul edelim ki $|A|=m$ ve $|B|=n$ olsun. Aşağıdaki kardinaliteleri hesaplayınız.

13. $|\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A)))|$

14. $|\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))|$

15. $|\mathscr{P}(A\times B)|$

16. $|\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)|$

17. $\big|\{X\in\mathscr{P}(A):|X|\le 1\}\big|$

18. $|\mathscr{P}(A\times\mathscr{P}(B))|$

19. $|\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A\times\emptyset)))|$

20. $\big|\{X\subseteq\mathscr{P}(A):|X|\le 1\}\big|$

1.5 Birleşim, Kesişim, Fark

Sayılar; toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemlere tabi tutularak başka sayılar elde edilir. Benzer şekilde kümelere uygulanabilecek çeşitli işlemler vardır. Örneğin (Bölüm 1.2'de tanımlı) kartezyen çarpım işlemi bunlardan biridir. Herhangi A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı alınarak $A \times B$ ile gösterilen yeni bir küme elde edilir. Şimdi kümeler üzerinde tanımlanan birleşim, kesişim ve fark işlemlerini verelim.

Tanım 1.5 A ve B iki küme olsun.
A ve B kümelerinin **birleşimi**, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$ kümesidir.
A ve B kümelerinin **kesişimi**, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ kümesidir.
A kümesinin B kümesinden **farkı**, $A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ kümesidir.

Sözel olarak ifade edelim: A'da veya B'de (ya da her ikisinde) olan tüm nesnelerin kümesi $A \cup B$'dir. Hem A'da hem B'de olan tüm nesnelerin kümesi $A \cap B$'dir. A'da olup B'de olmayan tüm nesnelerin kümesi ise $A - B$'dir.

Örnek 1.8 $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{d,e,f\}$ ve $C = \{1,2,3\}$ olsun.

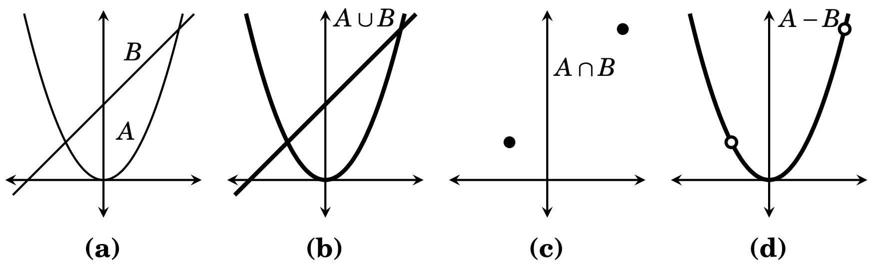
1. $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$
2. $A \cap B = \{d,e\}$
3. $A - B = \{a,b,c\}$
4. $B - A = \{f\}$
5. $(A-B) \cup (B-A) = \{a,b,c,f\}$
6. $A \cup C = \{a,b,c,d,e,1,2,3\}$
7. $A \cap C = \emptyset$
8. $A - C = \{a,b,c,d,e\}$
9. $(A \cap C) \cup (A - C) = \{a,b,c,d,e\}$
10. $(A \cap B) \times B = \{(d,d),(d,e),(d,f),(e,d),(e,e),(e,f)\}$
11. $(A \times C) \cap (B \times C) = \{(d,1),(d,2),(d,3),(e,1),(e,2),(e,3)\}$

Aşağıda 12–15 arasındaki örnekler, Bölüm 1.1'de verilen aralık notasyonunu kullanır. Buna göre örneğin $[2,5] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 5\}$ vb. olur. Bunları sayı doğrusu üzerinde çizmek, onları anlamanıza yardımcı olabilir.

12. $[2,5] \cup [3,6] = [2,6]$
13. $[2,5] \cap [3,6] = [3,5]$
14 $[2,5] - [3,6] = [2,3)$
15. $[0,3] - [1,2] = [0,1) \cup (2,3]$

Görüleceği üzere herhangi iki X ve Y kümesi için $X \cup Y = Y \cup X$ ve $X \cap Y = Y \cap X$ ifadeleri daima doğrudur ama genel olarak $X - Y \neq Y - X$ olur.

Örnek 1.9 $A = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{(x,x+2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümeleri sırasıyla $y = x^2$ ve $y = x+2$ fonksiyonlarının grafikleridir. $\mathbb{R}^2$ düzleminin birer altkümesi olan bu kümeler Şekil 1.5(a)'da aynı anda çizilmiştir. Şekil 1.5(b), grafiklerin biri (ya da her ikisi) üzerindeki tüm (x,y) noktalarından oluşan $A \cup B$ kümesini gösterir. Şekil 1.5(c)'de gösterildiği üzere $A \cap B = \{(-1,1),(2,4)\}$ kümesi, grafiklerin kesiştiği iki noktadan oluşur. Şekil 1.5(d), A kümesinden B ile kesiştiği noktaların "çıkarılmasıyla" elde edilen $A - B$ kümesini gösterir. Ortak özellik yöntemi kullanılarak $A \cup B = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y = x^2$ veya $y = x+2\}$ ve $A - B = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R} - \{-1,2\}\}$ yazılabilir.



Şekil 1.5: A kümesinin B kümesi ile birleşimi, kesişimi ve farkı

Bölüm 1.5 Alıştırmaları

1. $A = \{4,3,6,7,1,9\}$, $B = \{5,6,8,4\}$ ve $C = \{5,8,4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $A \cup B$ **(d)** $A - C$ **(g)** $B \cap C$
(b) $A \cap B$ **(e)** $B - A$ **(h)** $B \cup C$
(c) $A - B$ **(f)** $A \cap C$ **(i)** $C - B$

2. $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ ve $C = \{2,8,4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $A \cup B$ **(d)** $A - C$ **(g)** $B \cap C$
(b) $A \cap B$ **(e)** $B - A$ **(h)** $C - A$
(c) $A - B$ **(f)** $A \cap C$ **(i)** $C - B$

3. $A = \{0,1\}$ ve $B = \{1,2\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $(A \times B) \cap (B \times B)$ **(d)** $(A \cap B) \times A$ **(g)** $\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$
(b) $(A \times B) \cup (B \times B)$ **(e)** $(A \times B) \cap B$ **(h)** $\mathscr{P}(A \cap B)$
(c) $(A \times B) - (B \times B)$ **(f)** $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ **(i)** $\mathscr{P}(A \times B)$

4. $A = \{b,c,d\}$ ve $B = \{a,b\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $(A \times B) \cap (B \times B)$ **(d)** $(A \cap B) \times A$ **(g)** $\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$
(b) $(A \times B) \cup (B \times B)$ **(e)** $(A \times B) \cap B$ **(h)** $\mathscr{P}(A \cap B)$
(c) $(A \times B) - (B \times B)$ **(f)** $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ **(i)** $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$

5. $X = [1,3]\times[1,3]$ ve $Y = [2,4]\times[2,4]$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız. (Yol gösterme: X ve Y kümeleri, aralıkların kartezyen çarpımıdır. Bölüm 1.2'deki alıştırmalara bir göz atıp $[1,3]\times[1,3]$ gibi kümelerin nasıl çizildiğini tekrar etmek fayadalı olabilir.)

6. $X = [-1,3]\times[0,2]$ ve $Y = [0,3]\times[1,4]$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

7. $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ ve $Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \ge 0\}$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

8. $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$ ve $Y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 0\}$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

9. $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{R}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ifadesi doğru mudur? $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{R}) = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için ne dersiniz?

10. $(\mathbb{R}-\mathbb{Z})\times\mathbb{N} = (\mathbb{R}\times\mathbb{N})-(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$ ifadesi doğru mudur yoksa yanlış mıdır? Açıklayınız.

1.6 Tümleyen

Kümeler üzerinde, *tümleyen* adı verilen başka bir işlem daha tanımlayalım. Bu tanım, birazdan açıklayacağımız *evrensel küme* kavramına dayanır.

Bir küme üzerinde çalışırken, neredeyse her zaman onu daha büyük bir kümenin altkümesi olarak görürüz. Örneğin $P = \{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$ asal sayılar kümesini ele alalım. Eğer bizden P'de olmayan bazı nesneleri söylememiz istenseydi cevap olarak 4, 6 veya 423 gibi bazı bileşik sayıları verebilirdik. Vladimir Putin P'de değildir diye bir cevabı muhtemelen vermezdik. Gerçekten de Vladimir Putin bu kümede değilir ancak o bir asal sayının ne olup olmadığı tartışmasının tamamen dışındadır. Aslında burada belirtilmemiş olsa da

$$P \subseteq \mathbb{N}$$

varsayımı yapılır çünkü asal sayılarıdan söz edebilmek için en doğal ortamı $\mathbb{N}$ sunar. Bu açıdan baktığımızda P'de olmayan herhangi bir nesne $\mathbb{N}$'de olmalıdır. Burada, büyük olan $\mathbb{N}$ kümesine P'nin **evrensel kümesi** denir.

Matematikte, işe yarar olan her kümenin doğal bir evrensel kümesinin var olduğu kabul edilir. Örneğin $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ birim çemberini düşünelim. Bu kümenin tüm elemanları $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerindedir. Doğal olarak, $\mathbb{R}^2$ düzlemini C kümesinin evrensel kümesi olarak düşünebiliriz. Özellikle belirtilmediği sürece, bir A kümesinin evrensel kümesi E ile gösterilir. Artık tümleyen işlemini tanımlayabiliriz.

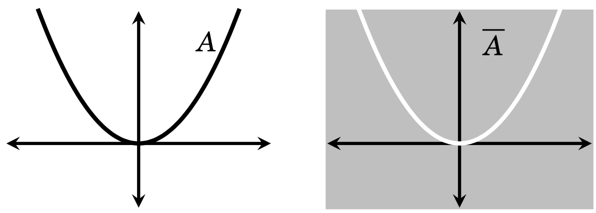
Tanım 1.6 Evrensel kümesi E olan bir A kümesi verilsin. A kümesinin **tümleyeni** $\overline{A}$ ile gösterilir ve $\overline{A} = E - A$ olarak tanımlanır.

Örnek 1.10 Eğer asal sayıların kümesi P ile gösterilirse

$$\overline{P} = \mathbb{N} - P = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}$$

olur. Buna göre $\overline{P}$ kümesi, bileşik sayılar ile 1'den oluşur.

Örnek 1.11 $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğidir. Şekil 1.6(a), A kümesini kendi evrensel kümesi olan $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde gösterir. Dikkat edilirse A kümesinin tümleyeni, Şekil 1.6(b)'de taranarak verilen $\overline{A} = \mathbb{R}^2 - A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$ kümesidir.



(a) **(b)**

Şekil 1.6: Bir küme ve tümleyeni

Bölüm 1.6 Alıştırmaları

1. $A = \{4, 3, 6, 7, 1, 9\}$ ve $B = \{5, 6, 8, 4\}$ kümelerinin evrensel kümesi $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $\overline{A}$ **(d)** $A \cup \overline{A}$ **(g)** $\overline{A} - \overline{B}$

(b) $\overline{B}$ **(e)** $A - \overline{A}$ **(h)** $\overline{A} \cap B$

(c) $A \cap \overline{A}$ **(f)** $A - \overline{B}$ **(i)** $\overline{\overline{A} \cap B}$

2. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{1, 3, 5, 7\}$ kümelerinin evrensel kümesi $E = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

(a) $\overline{A}$ **(d)** $A \cup \overline{A}$ **(g)** $\overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{B}$ **(e)** $A - \overline{A}$ **(h)** $\overline{A \cap B}$

(c) $A \cap \overline{A}$ **(f)** $\overline{A \cup B}$ **(i)** $\overline{A} \times B$

3. $X = [1, 3] \times [1, 2]$ kümesini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ ve $\overline{X} \cap ([0, 2] \times [0, 3])$ kümelerini tarayınız.

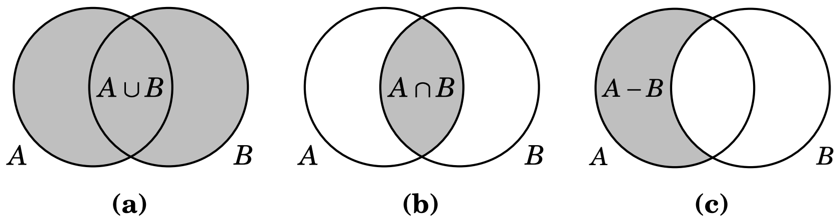
4. $X = [-1, 3] \times [0, 2]$ kümesini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ ve $\overline{X} \cap ([-2, 4] \times [-1, 3])$ kümelerini tarayınız.

5. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ kümesini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ kümesini tarayınız.

6. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$ kümesini $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz. $\overline{X}$ kümesini tarayınız.

1.7 Venn Diyagramları

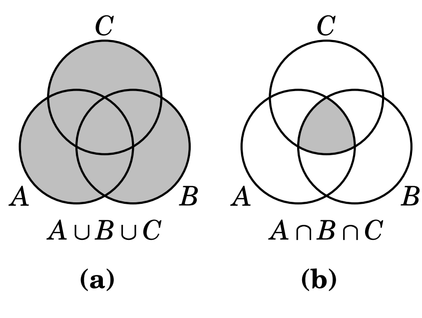
Kümeler üzerinde çalışırken, şematik diyagramlar kullanmak bazen faydalı olabilir. Bunun için kümeyi, bütün elemanlarını kapsayan bir daire (veya oval) ile temsil ederiz. Bu diyagramlar, kümelerin çeşitli işlemler altında nasıl bir araya geldiklerini gösterir. Örneğin A ve B kümelerinin ortadaki bölgede örtüştüklerini gösteren Şekil 1.7(a-c)'de $A \cup B$, $A \cap B$ ve $A - B$ kümeleri taranmıştır. Kümelerin bu tür şematik gösterimlerine **Venn diyagramları** denir. Bu diyagramların ismi, onları keşfeden İngiliz mantık bilimcisi John Venn'den (1834-1923) gelir.



Şekil 1.7: İki küme için Venn diyagramları

Venn diyagramlarını bir ispatın parçası olarak kullanmak pek de olası değildir. Ancak kümelerin kombinasyonlarını anlamak, belirli teoremleri ispatlamak ya da bazı problemleri çözmek amacıyla stratejiler geliştirmek için Venn diyagramlarının çok kullanışlı "araçlar" olduğunu göreceksiniz. Bu bölümün geri kalan kısmında, Venn diyagramlarını kullanarak üç tane kümenin $\cup$ ve $\cap$ işlemleri altındaki kombinasyonlarını araştıracağız.

İlk önce $A \cup B \cup C$ ile başlayalım. Birleşim tanımı; bu kümenin A, B ve C kümelerinden birine ya da birden fazlasına ait olan tüm elemanlardan oluştuğunu söyler. Şekil 1.8(a), bu kümeye ait Venn diyagramını gösterir. Benzer şekilde $A \cap B \cap C$ kümesi; A, B ve C kümelerinin hepsinde olan tüm elemanların kümesidir. Her üç kümeye ait olan bölge Şekil 1.8(b)'de taranmıştır.

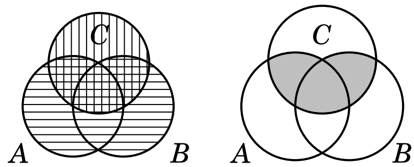


Şekil 1.8: Üç küme için Venn diyagramları

Aslında $A \cap B \cap C$ kümesini, iki adımlı $(A \cap B) \cap C$ işlemi olarak düşünebiliriz. $A \cap B$ kümesi hem A hem B içinde olan ortak bölgeyle temsil edilir. *Bunu* C ile kesiştirdiğimizde Şekil 1.8(b)'de taranan bölgeyi elde ederiz. Bu, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$ eşitliğinin görsel bir kanıtıdır. Benzer şekilde $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$ ve $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ olduğu görülebilir.

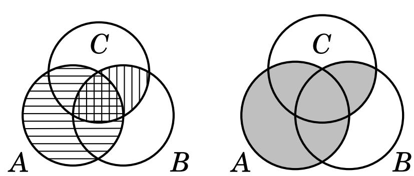
Dikkat edilirse $\cup$ ve $\cap$ sembollerinden sadece birini içeren yukarıdaki örneklerde parantezlerin bir önemi yoktur. Yani onlar kullanılmasa da olur. Bunlar, cebir derslerindeki $(a+b)+c = a+(b+c)$ veya $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ eşitliklerine benzer. Bunları parantez kullanmadan kısaca $a+b+c$ veya $a \cdot b \cdot c$ biçiminde yazarız. Buna karşılık $(a+b) \cdot c$ ile $a+(b \cdot c)$ eşit olmadığı için $(a+b) \cdot c$ gibi bir ifadede mutlaka parantez kullanmak gerekir.

Şimdi, $\cup$ ve $\cap$ işlemlerini aynı anda içeren $(A \cup B) \cap C$ ve $A \cup (B \cap C)$ kümelerini anlamak için Venn diyagramlarını kullanalım. Şekil 1.9'da $(A \cup B) \cap C$ kümesine ait Venn diyagramının nasıl çizileceği gösterilmiştir. Sol taraftaki çizimde $A \cup B$ kümesi yatay çizgilerle, C kümesi ise düşey çizgilerle taranmıştır. Buna göre $(A \cup B) \cap C$ kümesi, $A \cup B$ ile C kümelerinin çakıştığı bölgedeki kareli çizgilerle taranan bölgedir. Sağ taraftaki çizimde, gereksiz taralı alanlar göz ardı edilerek $(A \cup B) \cap C$ kümesi gösterilmiştir.



Şekil 1.9: $(A \cup B) \cap C$ kümesine ait Venn diyagramının oluşturulması

Sırada, $A \cup (B \cap C)$ kümesine bakalım. Şekil 1.10'da A kümesi yatay, $B \cap C$ kümesi ise düşey çizgilerle taranmıştır. Bu iki kümenin birleşimi olan $A \cup (B \cap C)$ kümesi, sağ taraftaki taralı bölgeyle temsil edilir.



Şekil 1.10: $A \cup (B \cap C)$ kümesine ait Venn diyagramının oluşturulması

Şekil 1.9 ve 1.10'da verilen $(A \cup B) \cap C$ ve $A \cup (B \cap C)$ kümelerine ait diyagramları karşılaştıralım. Bu diyagramların farklı olması, genel olarak $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$ olduğunu gösterir. Bu nedenle $A \cup B \cap C$ gibi bir ifade tartışmasız bir şekilde anlamsızdır çünkü bunun $(A\cup B)\cap C$ kümesi mi yoksa $A\cup(B\cap C)$ kümesi mi olduğu belirsizdir. Özetleyecek olursak, Venn diyagramları aşağıdakileri anlamamıza yardımcı olur.

Önemli Noktalar:

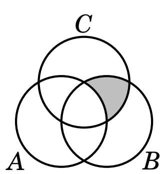
- Sadece $\cup$ sembolünü içeren ifadelerde parantez kullanımı isteğe bağlıdır.
- Sadece $\cap$ sembolünü içeren ifadelerde parantez kullanımı isteğe bağlıdır.
- Hem $\cup$ hem de $\cap$ içeren ifadelerde parantez kullanımı **zorunludur**.

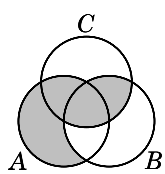
Sonraki bölümde, $\cup$ ve $\cap$ işlemlerinden sadece birini içeren ifadelere odaklanacağız. O ifadelerde parantez kullanmak gerekmeyecektir.

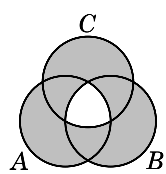
Bölüm 1.7 Alıştırmaları

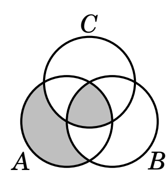
1. A kümesinin evrensel kümesi E olsun. $\overline{A}$ kümesine ait Venn diyagramını çiziniz.
2. $B-A$ kümesine ait Venn diyagramını çiziniz.
3. $(A-B)\cap C$ kümesine ait Venn diyagramını çiziniz.
4. $(A\cup B)-C$ kümesine ait Venn diyagramını çiziniz.
5. $A\cup(B\cap C)$ ve $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ kümelerinin Venn diyagramlarını çiziniz. Bu çizimlere dayanarak $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
6. $A\cap(B\cup C)$ ve $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ kümelerinin Venn diyagramlarını çiziniz. Bu çizimlere dayanarak $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
7. Evrensel kümeleri E olan A ve B kümeleri verilsin. $\overline{A\cap B}$ ve $\overline{A}\cup\overline{B}$ kümelerinin Venn diyagramlarını çiziniz. Bu çizimlere göre $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ eşitliği doğru mudur?
8. Evrensel kümeleri E olan A ve B kümeleri verilsin. $\overline{A\cup B}$ ve $\overline{A}\cap\overline{B}$ kümelerinin Venn diyagramlarını çiziniz. Bu çizimlere göre $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ eşitliği doğru mudur?
9. $(A\cap B)-C$ kümesine ait Venn diyagramı çiziniz.
10. $(A-B)\cup C$ kümesine ait Venn diyagramı çiziniz.

Aşağıda A, B ve C kümelerini içeren Venn diyagramları verilmiştir. Bu diyagramlara karşılık gelen ifadeleri yazınız.

11. 

12. 

13. 

14. 

1.8 İndislenmiş Kümeler

Çok sayıda küme içeren matematik problemlerinde, kümeleri kolaylıkla akılda tutabilmek için alt indisler kullanılır. Buradan hareketle üç tane kümeyi A, B ve C yerine A_1, A_2 ve A_3 sembolleri ile gösterebiliriz. Bu türdeki kümelere **indislenmiş kümeler** denir.

Her ne kadar birleşim ve kesişim işlemleri iki küme için tanımlanmış olsa da artık bunları üç veya daha fazla kümeye zorlanmadan uygulayabilmeniz gerekir. (Önceki bölümde, üç kümenin kesişimi ve birleşimi için çizilen Venn diyagramlarını hatırlayınız.) Ancak tanımları dikkatlice yapmak için biraz vakit ayıralım. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verildiğinde $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ kümesi, A_i kümelerinden *en az birinde* olan tüm nesnelerden oluşur. Benzer şekilde $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ kümesi, A_i kümelerinin *hepsinde* ortak olarak bulunan tüm nesnelerden oluşur. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 1.7 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n &= \{x : \textit{en az bir } i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x \in A_i\}, \\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n &= \{x : \textit{her } i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Kümelerin sayısı büyük olduğunda, yukarıdaki ifadeler karmaşık bir hâl alır. Bu düzensizliği aşmak için toplam sembolüne benzer bir notasyon kullanabiliriz. Bilindiği üzere toplam (veya sigma) sembolü, birçok sayı içeren bir toplamı göstermek için kullanılan çok pratik bir notasyondur. Daha açık bir ifadeyle a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ sayıları verildiğinde

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

yazılır. Verilen sayıların sayısı sonsuz olsa bile bu ifade anlamlıdır:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots.$$

Şimdi kullanacağımız notasyon buna çok benzer. Verilen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümeleri için aşağıdaki tanımı yapabiliriz:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n.$$

Örnek 1.12 $A_1 = \{0, 2, 5\}$, $A_2 = \{1, 2, 5\}$ ve $A_3 = \{2, 5, 7\}$ olsun. Buna göre $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{0, 1, 2, 5, 7\}$ ve $\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2, 5\}$ olur.

Bu notasyon $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ kümeleri sonsuz sayıda olsa bile kullanılır:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots &= \{x : \text{ en az bir } i \geq 1 \text{ için } x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots &= \{x : \text{ her } i \geq 1 \text{ için } x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Örnek 1.13 Aşağıda, sonsuz sayıda küme verilmiştir:

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad A_2 = \{-2, 0, 2\}, \quad A_3 = \{-3, 0, 3\}, \quad \ldots, \quad A_i = \{-i, 0, i\}, \quad \ldots$$

Dikkat edilirse $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{Z}$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$ olduğu görülebilir.

Bu notasyonun kullanışlı bir formu da şu şekildedir:

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} A_i .$$

Bu ifadeden; $i = 1, 2, 3$ için A_i kümelerinin birleşimi anlaşılır. Benzer şekilde

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

yazılabilir. Burada, i indisi $\{1, 2, 3\}$ veya $\mathbb{N}$ gibi bir kümenin elemanı olmak üzere, A_i kümelerinden oluşan bir ailenin birleşimi veya kesişimi alınmaktadır. Genellersek, olası tüm indislerin kümesi I ve $i \in I$ olmak üzere bu aileler A_i kümelerinden oluşur. I kümesine **indis kümesi** denir.

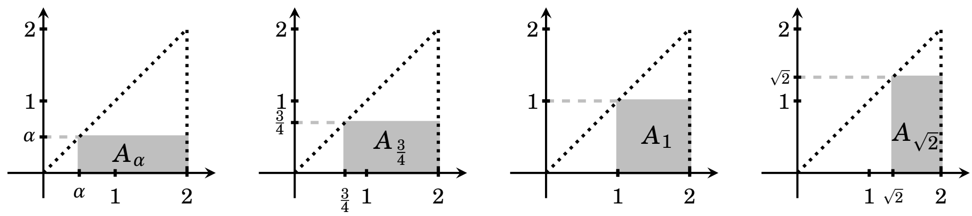
Burada vurgulamak gerekirse I kümesi sadece tamsayılardan oluşmak zorunda değildir. (Örneğin harfler veya reel sayılar alt indis olarak kullanılabilir.) Otomatik bir şekilde i harfini hep bir tamsayı olarak düşündüğümüz için notasyonda ufak bir değişikliğe gidelim: I kümesinin bir elemanını i ile değil de α ile gösterelim. Böylece $\alpha \in I$ olmak üzere A_α kümelerinden oluşan bir aileyi göz önüne alarak ve aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 1.8 Boştan farklı bir I indis kümesi verilsin. Her $\alpha \in I$ için bir A_α kümesi var ise

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \{x : \text{ en az bir } A_\alpha \text{ için } x \in A_\alpha\} \\ \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha &= \{x : \text{ her } A_\alpha \text{ için } x \in A_\alpha\} \end{aligned}$$

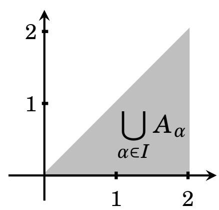
olarak tanımlanır.

Örnek 1.14 Bu örnekteki her A_α kümesi $\mathbb{R}^2$ düzleminin bir altkümesidir. Her α sayısı ise $I = [0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\}$ indis kümesinin bir elemanıdır. Şimdi, bir $\alpha \in I$ reel sayısına karşılık gelen A_α kümesini $A_\alpha = [\alpha,2] \times [0,\alpha]$ ile tanımlayalım. Bu küme; tabanı $x-$ekseni üzerindeki $[\alpha,2]$ aralığı, yüksekliği ise α olan bir dikdörtgendir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir. (Her bir A_α dikdörtgenin sol üst köşesi, noktalı çizgilerle gösterilen $y = x$ doğrusu üzerindedir. Fakat bu doğrunun kendisi hiçbir kümeye ait değildir.) Dikkat edilirse indis kümesi sadece tamsayılardan oluşmaz. Örneğin $\sqrt{2} \in I$ olduğu için aşağıdaki şeklin en sağında gösterilen $A_{\sqrt{2}}$ adında bir küme vardır.



Dikkat edilirse $A_0 = [0,2] \times [0,0] = [0,2] \times \{0\}$ kümesi, $x-$ekseni üzerindeki $[0,2]$ aralığıdır (yüksekliği "0" olan dikdörtgen). $A_2 = [2,2] \times [0,2] = \{2\} \times [0,2]$ kümesi ise noktalı çizgilerle belirtilen üçgenlerin düşey kenarıdır.

Şimdi, sonsuz çoklukta kümenin birleşimi olan $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ kümesine bakalım. Bu küme aşağıda verilen taralı üçgendir çünkü bu üçgen içindeki herhangi bir (x, y) noktası A_x kümesine ve böylece de birleşim kümesine aittir. (Üçgen üzerinde olmayan bir nokta, herhangi bir A_x kümesi içinde değildir.)



Şimdi de $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ kümesine bakalım. Dikkat edilirse her bir A_α kümesinin sağ alt köşesi, $x-$ekseni üzerinde olan $(2,0)$ noktasıdır. Buna göre her $\alpha \in I$ için $(2,0) \in A_\alpha$ olur. O hâlde $(2,0)$ noktası tüm A_α kümelerinin kesişimindedir. Ancak $(2,0)$ noktasından farklı bir (x, y) noktası tüm A_α kümelerine ait olamaz. Bunun nedeni şudur: $x < 2$ ise herhangi bir $x < \alpha \le 2$ için $(x, y) \notin A_\alpha$ olur. (Kontrol et!) Ayrıca $x = 2$ ise her $0 < \alpha \le y$ için $(x, y) \notin A_\alpha$ olur. Sonuç olarak

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{(2,0)\}$$

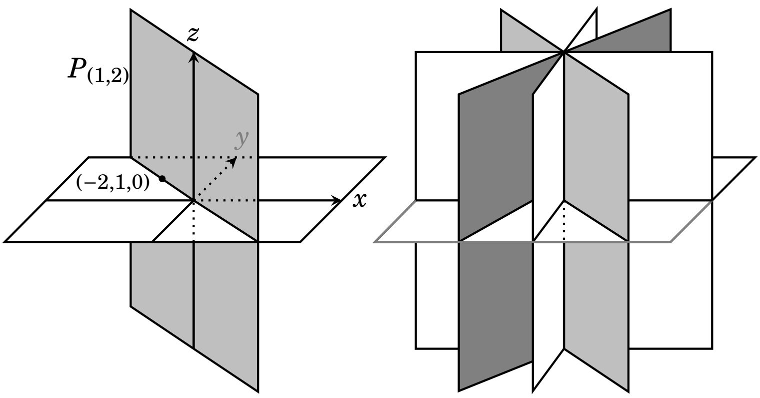
bulunur. Bu kesişim sadece bir elemandan oluşur; o da $(2,0)$ elemanıdır.

Örnek 1.15 Bu örnekte, $\mathbb{R}^2$ tarafından indislenen kümeleri ele alacağız. Herhangi bir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ için $\mathbb{R}^3$ uzayının bir altkümesi olan $P_{(a,b)}$ kümesi

$$P_{(a,b)} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = 0\right\}$$

ile tanımlansın. Kelimelerle ifade edersek herhangi bir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ noktasına karşılık gelen $P_{(a,b)}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayında $ax + by = 0$ denklemini sağlayan tüm noktaların kümesidir. Daha önceki matematik derslerinden bildiğiniz üzere bu noktaların kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayında bir düzlem belirtir. O hâlde $P_{(a,b)}$ kümesi $\mathbb{R}^3$'te bir düzlemdir. Üstelik $z-$ekseni üzerindeki her $(0,0,z)$ noktası $ax+by = 0$ denklemini sağlar. Bu nedenle her $P_{(a,b)}$ kümesi $z-$eksenini içerir.

Şekil 1.11'nin sol tarafında $P_{(1,2)} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\right\}$ kümesi verilmiştir. Bu küme, $xy-$düzlemini $x+2y = 0$ doğrusunda kesen düşey düzlemdir.



Şekil 1.11: $P_{(a,b)}$ kümeleri $z-$eksenini içeren düşey düzlemlerdir

Orijinden farklı bir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ noktasına karşılık gelen $P_{(a,b)}$ kümesini, $xy-$düzlemini $ax + by = 0$ doğrusunda kesen düşey düzlem olarak düşünebiliriz. Şekil 1.11'nin sağında birkaç $P_{(a,b)}$ kümesi gösterilmiştir. Buna göre herhangi iki düzlem, $z-$ekseni boyunca kesişir. Üstelik $z-$ekseni her $P_{(a,b)}$ kümesinin bir altkümesi olduğu için aşağıdaki eşitliğin doğruluğu açıktır:

$$\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} P_{(a,b)} = \left\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\right\} = \text{“}z\text{−ekseni”}$$

Şimdi bu kümelerin birleşimine bakalım. Verilen bir $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ noktası $P_{(-b,a)}$ kümesine aittir çünkü $(x,y,z) = (a,b,c)$ noktası $-bx+ay = 0$ denklemini sağlar. (Aslında her (a,b,c) noktası $P_{(0,0)} = \mathbb{R}^3$ kümesine aittir. Bu kümenin özelliği, bir düzlem olmayan tek $P_{(a,b)}$ kümesi olmasıdır.) O hâlde $\mathbb{R}^3$'teki herhangi bir nokta, bir $P_{(a,b)}$ kümesinin bir elemanıdır. Böylelikle,

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} P_{(a,b)} = \mathbb{R}^3.$$

Bölüm 1.8 Alıştırmaları

1. $A_1 = \{a,b,d,e,g,f\}$, $A_2 = \{a,b,c,d\}$, $A_3 = \{b,d,a\}$ ve $A_4 = \{a,b,h\}$ kümeleri verilsin.

(a) $\bigcup_{i=1}^{4} A_i =$ **(b)** $\bigcap_{i=1}^{4} A_i =$

2. Aşağıda A_1, A_2 ve A_3 kümeleri tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} A_1 &= \{0,2,4,8,10,12,14,16,18,20,22,24\} \\ A_2 &= \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\} \\ A_3 &= \{0,4,8,12,16,20,24\} \end{cases}$$

(a) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i =$ **(b)** $\bigcap_{i=1}^{3} A_i =$

3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{0,1,2,3,\dots,n\}$ olarak tanımlansın.

(a) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i =$ **(b)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i =$

4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{-2n, 0, 2n\}$ olarak tanımlansın.

(a) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i =$ **(b)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i =$

5. (a) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [i, i+1] =$ **(b)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [i, i+1] =$

6. (a) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [0, i+1] =$ **(b)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [0, i+1] =$

7. (a) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] =$ **(b)** $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] =$

8. (a) $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha\} \times [0,1] =$ **(b)** $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha\} \times [0,1] =$

9. (a) $\bigcup_{X\in\mathscr{P}(\mathbb{N})} X =$ **(b)** $\bigcap_{X\in\mathscr{P}(\mathbb{N})} X =$

10. (a) $\bigcup_{x\in[0,1]} [x,1] \times [0, x^2] =$ **(b)** $\bigcap_{x\in[0,1]} [x,1] \times [0, x^2] =$

11. İndis kümesi I olan A_α kümelerinin bir ailesi verilsin. Buna göre $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ifadesi her zaman doğru mudur?

12. Eğer $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ise A_α kümeleri arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

13. Eğer $J \neq \emptyset$ ve $J \subseteq I$ ise $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ olur mu? $\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ için ne dersiniz?

14. Eğer $J \neq \emptyset$ ve $J \subseteq I$ ise $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$ olur mu? Açıklayınız.

1.9 Sayı Sistemi Olan Kümeler

Pratikte karşımıza çıkan kümeler, genellikle özel yapılara ve niteliklere sahiptir. Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer sayı sistemidir. Böyle bir kümenin herhangi iki elemanı toplanarak (veya çarpılarak vs.) yine aynı kümenin başka bir elemanı elde edilir. Bu işlemler hepimizin yıllardan beri bildiği değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahiptir. Bu özellikler kullanılarak, denklemleri çözmek için cebirsel yöntemler geliştirilmiştir. Burada ispatlarla ilgileniyor olmamıza rağmen bu tür özellikleri ve yöntemleri tanımlama, ispatlama veya doğrulama gereksinimi duymayacağız. Bunları temel kurallar olarak kabul edip, yapacağımız çıkarımları bunların üzerine inşa edeceğiz.

Bunlara ek olarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri üzerindeki doğal sıralamayı ispatlamadan doğru kabul edeceğiz. Böylece (örneğin) "$5 < 7$" ifadesinin ne anlama geldiğini anlayacak ancak bunu doğrulama ya da açıklama gereksinimi duymayacağız. Benzer şekilde eğer $x \le y$ ve $a \neq 0$ ise a sayısının pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak $ax \le ay$ veya $ax \ge ay$ yazacağız.

Sayıların sıralamasına ilişkin olarak kafamıza yerleşmiş düşüce, $\mathbb{N}$ kümesinin boştan farklı her altkümesinin bir en küçük elemana sahip olduğunu söyler. Başka bir deyişle eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $A \neq \emptyset$ ise A kümesinde, diğer tüm elemanlardan daha küçük olan bir $x_0 \in A$ vardır. (Bu elemanı bulmak için 1'den başlayın ve $x_0 \in A$ sayısına ulaşana kadar 2, 3, 4 vb. sayıları kontrol edin. Bulduğunuz sayı A kümesinin en küçük elemanıdır.) Benzer şekilde b bir tamsayı ise boştan farklı her $A \subseteq \{b, b+1, b+2, b+3, \ldots\}$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu özellik, **iyi sıralama ilkesi** olarak bilinir. Bu terimi akılda tutmasanız da olur ancak ifade ettiği düşünceyi ispatlarda sıklıkla kullanacağımızın farkında olmanız gerekir.

İyi sıralama ilkesi çok sıradan bir özellikmiş gibi görünebilir fakat pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{N}$ hakkında çok önemli bir bilgi verir. Aslında aynı özellik pozitif reel sayılarda geçerli değildir. Örneğin pozitif reel sayılardan oluşan $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en küçük elemanı yoktur çünkü seçilen her $x_0 = \frac{1}{n} \in A$ elemanına karşılık ondan daha küçük olan $\frac{1}{n+1} \in A$ daima vardır.

İyi sıralama ilkesinin sonuçlarından biri (aşağıda göreceğimiz gibi) herhangi bir a tamsayısının sıfırdan farklı bir b tamsayısına bölünebilmesi ve bunun sonucunda bir q bölümü ile r kalanının elde edilmesidir. Örneğin $a = 17$ tamsayısı $b = 3$ ile bölünerek $q = 5$ bölümü ve $r = 2$ kalanı elde edilir. Bu işlem, sembolik olarak $17 = 5 \cdot 3 + 2$ ya da $a = qb + r$ şekilinde yazılır. Bu gözlem **bölme algoritması** olarak adlandırılır.

Gözlem 1.5 (Bölme Algoritması) Eğer a ile b iki tamsayı ve $b > 0$ ise $a = qb + r$ ve $0 \le r < b$ olacak şekilde bir tek q ve r tamsayı çifti vardır.

Bölme algoritmasını ispatlamadan doğru kabul edip kullanmanın bir sakıncası yoktur. Ancak bu algoritma gerçekten de iyi sıralama ilkesine dayanır. İşte sebebi: $b > 0$ olmak üzere a ve b tamsayıları verilsin. Buna göre

$$A = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, 0 \le a - xb\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

kümesini ele alalım. Bu küme, a tamsayısından b tamsayısının katları çıkarılarak elde edilen ve negatif olmayan sayıların kümesidir. (Örneğin $a = 17$ ve $b = 3$ ise 17'den 3'ün katları çıkarılarak $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$ elde edilir. Bu kümenin en küçük elemanı, $17 \div 3$ işleminden kalan $r = 2$ tamsayısıdır.) Genellersek, iyi sıralama ilkesi $A = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, 0 \le a - xb\}$ kümesinin bir en küçük elemanı olduğunu söyler. Bu elemana r dersek $r = a - qb$ olacak şekilde bir $q \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $a = qb + r$ yazılabilir. Ayrıca $r \in A \subseteq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ olması $0 \le r$ olmasını gerektirir. Üstelik $r \ge b$ olamaz. Aksi hâlde $r - b = (a - qb) - b = a - (q+1)b$ sayısı $a - xb$ formunda olduğu için A kümesinin bir elemanıdır ve r tamsayısından küçüktür. Ancak r özel olarak A'nın en küçük elemanı seçilmiştir. O hâlde $r \ge b$ olamayacağına göre $r < b$ olmalıdır. Böylece $0 \le r < b$ bulunur. Sonuç olarak $a = qb + r$ ve $0 \le r < b$ koşulunu sağlayan q ve r sayıları üretilmiştir. (Ünite 7'nin 28. alıştırmasında, q ve r tamsayılarının bir tek olduğunu göstermeniz istenecektir.)

Şimdi, küçük bir meseleyi açığa kavuşturma vakti geldi. Bu ünitenin başında, matematiğin tamamının kümelerle ifade edilebileceğini iddia ettik. Fakat daha sonra bazı matematiksel nesnelerin küme olmadıklarını belirttik. (Örneğin 5 gibi bir tamsayının bir küme değil de kümenin bir *elemanı* olduğunu söyledik.) Bu ayrımın sebebi, kümeleri tanımlarken bir dayanak noktasına ihtiyaç duyulmasıdır. Neticede her matematiksel nesneyi bir küme ilan etmek, şüphesiz ki dairesel bir görüntüye yol açar. Böylece bir küme, başka kümelerin bir ailesi olarak tanımlanmak zorunda kalır!

Ancak matematikçilerin çoğu için "5 sayısı bir küme değildir" demek "5 sayısı bir sayı değildir" demek gibi birşeydir.

Gerçek şu ki herhangi bir sayının kendisi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu yapmanın bir yolu, $0 = \emptyset$ tanımını yaparak işe başlamaktır. Buna göre $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$ ve $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0,1,2\}$ olur. Genelleyecek olursak bir n doğal sayısı, kendisinden önce gelen (ve herbiri bir küme olan) n tane sayıdan oluşan $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesidir.

Biz burada böyle bir işe girişmesek de kümeleri kullanarak $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ sayı sistemlerinin elemanları tanımlanabilir. (Toplama, çarpma vb. işlemler bile kümeler teorisi kullanılarak tanımlanabilir.) Aslında matematiğin kendisi, küme olarak tanımlanabilecek nesnelerin incelenmesi olarak düşünülebilir. Herhangi bir matematiksel varlık, biz bu şekilde düşünmek istesek de istemesek de, bir kümedir.

1.10 Russel Paradoksu

Bu bölüm, ilginç olan ancak kitabın geri kalan kısmında kullanılmayan bazı temel bilgileri içerir.

Bir filozof ve matematikçi Bertrand Russell (1872-1970), kümeler teorisi ve matematiğin temelleri üzerine çığır açan çalışmalar yapmıştır. Kendisi, kümelerin yanlış kullanımının tuhaf durumlara ve paradokslara yol açtığını anlayan muhtemelen ilk kişiler arasındadır. **Russell paradoksu** olarak bilinen fikriyle ünlüdür.

Russel paradoksu

$$A = \{X : \ X \text{ bir küme ve } X \notin X\} \tag{1.1}$$

kümesi hakkındadır. Kelimelerle ifade edersek A kümesi, kendisini bir elemanı olarak içermeyen tüm kümelerin kümesidir. Aklımıza gelebilecek birçok küme A kümesinin bir elemanıdır. Örneğin tamsayılar kümesinin kendisi bir tamsayı değildir (yani $\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$). Bu nedenle $\mathbb{Z} \in A$ olur. Benzer şekilde $\emptyset$ bir kümedir ve $\emptyset \notin \emptyset$ olduğu için $\emptyset \in A$ olur.

Şimdi şu soruyu soralım: A kümesinde olmayan bir küme var mıdır? Buna cevap vermek için $B = \{\{\{\{\ldots\}\}\}\}$ kümesini ele alalım. B kümesini, bir kutu içeren kutuyu içeren vb. şekilde sonsuza dek devam eden bir kutu olarak düşünebiliriz. Ya da iç içe geçmiş sonsuz sayıda matruşka bebek olarak hayal edebiliriz. B kümesinin ilginç yanı, tek elemanlı olmasıdır. Bir başka deyişle B kümesinin tek elemanı kendisidir:

$$B = \{\underbrace{\{\{\{\ldots\}\}\}}_{B}\}.$$

Buna göre $B \in B$ olur. B kümesi $B \notin B$ şartını sağlamadığı için Eşitlik 1.1 gereğince $B \notin A$ olur.

Russell paradoksu *"A kümesi, kendisinin bir elemanı mıdır?"* sorusuyla ortaya çıkar. Bunu görmek için, bir X kümesini ele alalım. Eşitlik 1.1, $X \in A$ olmasının $X \notin X$ olmasıyla aynı anlama geldiğini belirtir. Özel olarak $X = A$ seçilmesi hâlinde, önceki cümle $A \in A$ olmasının $A \notin A$ olması anlamına geleceğini söyler. Sonuç olarak eğer $A \in A$ doğru ise bu yanlıştır; eğer $A \in A$ yanlış ise bu doğrudur. Bu, Russell paradoksudur.

Başlangıçta Russell paradoksu matematikçiler arasında bir krize yol açmıştır. Matematiksel bir önerme nasıl olurda hem doğru hem de yanlış olabilir? Bu durum, matematiğin ruhuna aykırı görünmüştür.

Paradoks, kümeler teorisinin titiz bir şekilde incelenerek neyin bir küme olabileceği ve neyin bir küme olmayacağı konusunun değerlendirilmesine önayak oldu. Sonunda matematikçiler, **Zermelo-Fraenkel aksiyomları** olarak bilinen bir dizi kümeler teorisi aksiyomları konusunda fikir birliğine vardı. Bu aksiyomlardan bir tanesi, önceki bölümde bahsedilen iyi sıralama ilkesidir. Başka bir aksiyom da boştan farklı bir X kümesinin, her $x \in X$ için $X \cap x \neq \emptyset$ özelliğine sahip olamayacağını söyleyen kurulum aksiyomudur. Bu aksiyom, yukarıdaki gibi dairesel bir şekilde tanımlanmış olan $B = \{B\}$ formundaki "kümeleri" kapsam dışı bırakır. Bu aksiyomlara bağlı kalındığı sürece Russell paradoksu ve benzeri durumlar ortaya çıkmaz. Çoğu matematikçi, bunları inanarak kabul eder ve Zermelo-Fraenkel aksiyomlarını görmezden gelir. Russell paradoksu gibi durumlar, kullandığımız günlük matematikte ortaya çıkmaz. Onları oluşturmak için standartların dışına çıkmak gerekir.

Russell paradoksu, düşünce ve dil hassasiyetinin matematiğin önemli bir parçası olduğunu hatırlatır. Bir sonraki ünite, düşünce ve dilin bir sisteme bağlanmasıyla oluşan mantık konusunu ele alacaktır.

Kümeler Üzerine Ek Okuma. Bertrand Russell'ın hayatını ve (paradoksunu içeren) eserini canlı bir şekilde aktaran, Apostolos Doxiadis ve Christos Papadimitriou'nun *Logicomix:* An Epic Search for Truth, adlı romanını okuyabilirsiniz. Ayrıca karikatürist Jessica Hagy'nin çoğunlukla Venn şemalarına dayanan çizimlerini internet üzerinden yayınladığı *Indexed* isimli eserine bir göz atabilirsiniz.

ÜNİTE 2

Mantık

Mantık, cümleleri anlamsal bakımdan incelememizi sağlayan ve eski bilgilerden yeni bilgiler üretmemize olanak veren sistematik düşünme tarzıdır. Günlük yaşantımızda gayriresmî bir şekilde kullandığımız mantığı özellikle matematikte kullanırız. Örneğin, "X Dairesi" olarak adladırdığımız bir daire hakkında aşağıdaki bilgiler verilsin:

1. X dairesinin yarıçapı 3'tür.
2. Bir dairenin yarıçapı r birim ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

Bu iki bilgiyi kolaylıkla bir araya getirip aşağıdaki sonucu elde edebilirsiniz:

3. X dairesinin alanı 9π birimkaredir.

Burada mevcut olan bilgileri bir araya getirip yeni bilgi üretmek için mantık kullanılmıştır. Matematikte yeni bilgilerin üretilmesi çok önemlidir ve burada mantık ana roldedir. Bu ünite, mantık konusunda size yetecek kadar bir uzmanlık kazandırmayı hedeflemektedir.

Mantık, bilgiyi doğru bir biçimde işleme sürecidir; sadece doğru bilgiyi ortaya çıkarma süreci *değildir*. Bunun farkında olmak önemlidir. Örneğin, hata yaptığımızı ve aslında X dairesinin yarıçapının 3 değil de 4 olduğunu varsayalım. Aynı argümanı yeniden inceleyelim:

1. X dairesinin yarıçapı 3'tür.
2. Bir dairenin yarıçapı r birim ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

---

3. X dairesinin alanı 9π birimkaredir.

Artık *"X dairesinin yarıçapı 3'tür."* cümlesi yanlıştır. O hâlde *"X dairesinin alanı 9π birimkaredir."* sonucu da yanlıştır. Ancak mantık kusursuz bir şekilde doğrudur çünkü bilgilerin bir kısmı yanlış olsa bile bunlar doğru bir şekilde işlenmiştir. Doğru mantık ile doğru bilgi arasındaki bu ayrım önemlidir çünkü yanlış bir varsayımın sonuçlarını takip edebilmek önemlidir. İdeal olanı, *hem* mantığın *hem de* verilen bilgilerin doğru olmasıdır. Burada vurgulanmak istenilen şey, bu iki kavramın birbirinden farklı olmasıdır.

Teoremleri ispatlarken, doğru olduğu açıkça belli olan (*"İki noktadan sadece bir tane doğru geçer."* gibi) ya da doğru olduğu zaten bilinen (örneğin, Pisagor teoremi) bilgilere mantık uygularız. Eğer kullandığımız mantık doğru ise bu tür bilgilerden elde ettiğimiz her sonuç da doğrudur (veya en azından, başlangıçta "açıkça doğru" kabul ettiğimiz bilgi kadar geçerlidir).

2.1 Önermeler

Mantık bilimi önermeler ile başlar. **Önerme**, ya kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlış olan bir cümle veya matematiksel ifadedir. Önermeleri, doğru ya da yanlış olan bilgi parçaları olarak düşünebilirsiniz. Bu bağlamda önermeler, mantık uygulayarak başka bilgi parçaları üretebileceğimiz bilgi parçalarıdır (ki elde edilen bilgi parçaları da birer önermedir).

Örnek 2.1 Önermelere örnek verelim. Aşağıdakilerin hepsi doğrudur.

Bir dairenin yarıçapı r birim ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

Her çift sayı 2 ile bölünür.

$2 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

$\{1,2,3\}$ kümesinin 3 tane elemanı vardır.

Bazı dik üçgenler ikizkenardır.

Örnek 2.2 Birkaç örnek daha verelim. Aşağıdakilerin hepsi yanlıştır.

Bütün dik üçgenler ikizkenardır.

$5 = 2$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

$\{0,1,2\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Örnek 2.3 Önerme olmayan ifadeleri, önerme *olan* benzer ifadeler ile eşleştirelim.

Önerme OLMAYANLAR:	Önermeler:
Her iki tarafa 5 ekle.	$x-5=37$ denkleminde her iki tarafa 5 eklenerek $x=42$ bulunur.
$\mathbb{Z}$	$42 \in \mathbb{Z}$
42	42 bir sayı değildir.
$2x = 84$ denkleminin çözümü kaçtır?	$2x = 84$ denkleminin çözümü $x = 4$'tür.

Örnek 2.4 Belirli bir önermeyi temsil etmek için çoğunlukla P, Q, R ve S harflerini kullanırız. Daha fazla harf gerekirse alt indis kullanabiliriz. Aşağıda, harfler ile adlandırılmış önermeler verilmiştir. Bunlardan hangilerinin doğru hangilerinin yanlış olduğuna siz karar verin.

P : Her $n > 1$ tamsayısı için $2^n - 1$ asaldır.

Q : Derecesi n olan her polinomun en fazla n tane kökü vardır.

R : $f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir.

$S_1 : \mathbb{Z} \subseteq \emptyset$

$S_2 : \{0, -1, -2\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

Önermeleri (yukarıda yapıldığı gibi) harflerle temsil etmek büyük bir kolaylık sağlar. Örneğin *"$f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir."* gibi belirli bir önermeyi tartışırken, bu önermeyi defalarca yazmak ya da söylemek zorunda kalmamak için ondan sadece R önermesi diye bahsetmek çok daha pratiktir.

Önermeler değişken içerebilir. Örneğin,

P : Eğer x tamsayısı 6'nın katı ise x çifttir.

Bu doğru bir cümledir. (Dikkat edilirse 6'nın tüm katları çifttir. Bu yüzden x tamsayısı, 6'nın hangi katı olursa olsun, çifttir.) Kesinlikle doğru olduğu için P cümlesi bir önermedir. Eğer bir P önermesi x gibi bir değişken içeriyor ise önermenin x hakkında bir şeyler söylediğini belirtmek için onu bazen $P(x)$ ile temsil ederiz. Böylece yukarıdaki önermeyi şu şekilde gösterebiliriz:

$P(x)$: Eğer x tamsayısı 6'nın bir katı ise x çifttir.

İki tane değişken içeren bir önerme veya cümle $P(x, y)$ ile gösterilebilir. İsimlendirme bu şekilde devam eder.

Değişken içeren bir cümlenin önerme olmaması da oldukça muhtemeldir. Örneğin aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım.

$Q(x)$: x tamsayısı çifttir.

Bu bir önerme midir? Bu ifadenin doğru ya da yanlış olması x tamsayısına bağlıdır. Örneğin $x = 4$ ise doğrudur, $x = 7$ ise yanlıştır. Ancak x üzerinde herhangi bir koşul olmaksızın $Q(x)$ ifadesinin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu söylemek imkânsızdır. Kesinlikle doğru ya da kesinlike yanlış olmadığı için $Q(x)$ bir önerme olamaz. Doğruluğu bir veya birden çok değişkene bağlı olan bu ve benzeri bir cümleye **açık önerme** denir. Bir açık önermedeki değişkenler sadece sayıları değil, herhangi türden bir varlığı temsil edebilir. Aşağıdaki açık önermenin değişkenleri birer fonksiyondur:

$R(f,g)$: f fonksiyonu g fonksiyonun türevidir.

Bu açık önerme, $f(x) = 2x$ ve $g(x) = x^2$ ise doğrudur fakat $f(x) = x^3$ ve $g(x) = x^2$ ise yanlıştır. Burada belirtmek gerekirse $R(f,g)$ gibi (değişken içeren) bir cümle, sadece R ile de gösterilebilir. Cümlenin değişken içerdiğini vurgulamak istediğimiz zaman $R(f,g)$ gösterimini kullanırız.

Açık önermeler konusunu daha sonra ele alacağız. Şimdilik önermelere geri dönelim.

Önermeler, matematiğin her alanında karşımıza çıkar. Doğru olduğu ispatlanmış olan her sonuç veya teorem bir önermedir. Örneğin, ikinci dereceden bir denklemin köklerini bulmak için kullanılan kuadratik formül ve Pisagor teoremi birer önermedir:

P : $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ile verilir.

Q : Kenar uzunlukları a ve b, hipotenüs uzunluğu c olan bir dik üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ olur.

Şimdi, çok meşhur olan bir önerme verelim. Bu önerme o kadar meşhurdur ki bir adı vardır. On yedinci yüzyıl Fransız matematikçilerinden Pierre Fermat tarafından bir kitabın kenar boşluğuna yazılan bu önerme **Fermat'ın son teoremi** olarak adlandırılır.

P : Her $n > 2$ tamsayısı için $a^n + b^n = c^n$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathbb{N}$ yoktur.

Fermat, bu önermenin doğru olduğuna inanmıştır. Bunu ispatlayabileceğini ancak kitabındaki kenar boşluğunun buna yetecek kadar geniş olmadığını belirtmiştir. Fermat'ın gerçekten de ispatı bilip bilmediği kuşkuludur çünkü ölümünden sonra üstün zekalı pek çok matematikçi, nesiller boyunca bunun doğru (ya da yanlış) olduğunu ispatlamakta başarısız olmuştur. Sonunda, 1993 yılında Princeton Üniversitesi'nden Andrew Wiles bu önermeyi ispatladığını duyurmuştur. Bu problem üzerinde yedi yıldan fazla çalışan Wiles'ın ispatı yüzlerce sayfadan oluşmaktadır. Bu hikayenin özeti, bazı doğru önermelerin ispatlarının o kadar da açık olmamasıdır.

İsim verilecek kadar ünlü olan başka bir önerme daha verelim. İlk olarak Alman matematikçi Christian Goldbach tarafından on sekizinci yüzyılda ortaya atılan bu önerme **Goldbach sanısı** olarak adlandırılır:

S : 2'den büyük olan her çift tamsayı, iki tane asal sayının toplamıdır.

Siz de takdir edersiniz ki S ya doğrudur ya da yanlıştır. Aslında doğruymuş gibi görünür çünkü $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 5+5$, $12 = 5+7$, $100 = 17+83$

vb. örneklerde olduğu gibi 2'den büyük bazı çift sayıları incelediğinizde, onların iki asal sayının toplamı olduğunu görebilirsiniz. Ancak bu, iki asal sayının toplamına eşit olmayan büyük bir çift sayı olmayacağı anlamına gelmez. Eğer böyle bir sayı var ise S yanlıştır. Asıl melese, Goldbach'ın bu problemi ortaya atmasının üzerinden 260 yıl geçmesine rağmen hiç kimsenin bunun doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu belirleyememesidir.

Bu kitap, S önermesinin (veya başka bir önermenin) doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu ispatlamak için kullanılabilecek yöntemleri anlatır. S önermesinin doğru olduğunu kanıtlamak için açıkça doğru (ya da doğruluğu kanıtlanmış) olan önermelerle başlar ve mantık kullanıp karmaşık önermeler elde ederiz. Bu süreci, S önermesini elde edene kadar devam ettiririz. Kuşkusuz ki bazı önermeleri kanıtlamak diğerlerinden daha zordur. Herkesin bildiği bir gerçek, S önemesini ispatlamanın çok zor olduğudur. Biz ispatlanması daha kolay önermeler üzerinde yoğunlaşacağız.

Asıl önemli olan nokta şudur: Önermeleri ispatlarken, onları anlamak ve bilgi parçalarını birleştirip yeni bilgiler üretmek için mantık kullanırız. Sonraki birkaç bölümde, yeni önermeler oluşturmak için elimizde olanları birleştirmenin ya da daha basit parçalara ayırmanın yollarına bakacağız.

Bölüm 2.1 Alıştırmaları

Aşağıdaki ifadelerin birer önerme olup olmadıklarını belirleyiniz. Mümkün olan durumlarda, önerme olan ifadelerin doğru mu yoksa yanlış mı olduklarını belirtiniz.

1. Her reel sayı çift bir tamsayıdır.
2. Her çift tamsayı bir reel sayıdır.
3. Eğer x ile y iki reel sayı ve $5x = 5y$ ise $x = y$ olur.
4. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri.
5. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri sonsuzdur.
6. Bazı kümeler sonludur.
7. Beşinci dereceden bir polinomun türevi altıncı dereceden bir polinomdur.
8. $\mathbb{N} \notin \mathscr{P}(\mathbb{N})$
9. $\cos(x) = -1$
10. $(\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
11. x tamsayısı 7'nin bir katıdır.
12. Eğer x tamsayısı 7'nin bir katı ise bu sayı 7 ile tam bölünür.
13. Bir x tamsayısı ya 7'nin bir katıdır ya da değildir.
14. Bana İsmail diyebilirsin.
15. Başlangıçta, Allah dünyayı ve cenneti yarattı.

2.2 Ve, Veya, Değil Bağlaçları

İki önermeyi birleştirerek yeni bir önerme oluşturmak için “ve” kelimesi kullanılabilir. Örneğin, aşağıdaki cümleyi göz önüne alalım.

R_1 : 2 çift sayıdır **ve** 3 tek sayıdır.

Bu önermeyi “ve” kelimesinin mantıksal anlamına dayanarak doğru kabul ederiz. Dikkat edilirse R_1 önermesi, iki tane basit önermeden oluşur:

P : 2 çift sayıdır.

Q : 3 tek sayıdır.

Bu ikisi “ve” bağlacıyla birleştirilerek daha karmaşık olan R_1 oluşturulmuştur. R_1 önermesi, P ve Q önermelerinin her ikisinin de doğru olduğunu belirtir. Hakikaten hem P hem de Q doğru olduğu için R_1 de doğrudur.

Eğer P ve Q önermelerinden biri veya her ikisi yanlış olsaydı R_1 de yanlış olurdu. Örneğin, aşağıdaki önermelerin hepsi yanlıştır.

R_2 : 1 çift sayıdır **ve** 3 tek sayıdır.

R_3 : 2 çift sayıdır **ve** 4 tek sayıdır.

R_4 : 3 çift sayıdır **ve** 2 tek sayıdır.

Yukarıdaki örneklerden görüleceği üzere herhangi iki P ve Q önermesi birleştirilerek yeni bir “P **ve** Q” önermesi oluşturulabilir. Önermeleri harflerle temsil etme anlayışına bağlı kalarak “ve” kelimesi yerine $\wedge$ sembolünü kullanalım. Böylelikle, P ile Q birer önerme ise “$P \wedge Q$” ifadesi “P **ve** Q” önermesini temsil eder. Hem P hem de Q doğru ise $P \wedge Q$ doğrudur; aksi hâlde yanlıştır. Bu durum, **doğruluk tablosu** adı verilen aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

P	Q	$P \wedge Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Bu tablodaki D harfi “Doğru” anlamına, Y harfi ise “Yanlış” anlamına gelir. (D ve Y harflerine **doğruluk değerleri** denir.) Her satır, P ve Q için dört olası doğruluk değerinden birini listeler. En üstünde $P \wedge Q$ olan sütun ise her bir durumda $P \wedge Q$ önermesinin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu belirtir.

Önermeler "**veya**" bağlacı kullanılarak da birleştirilebilir. Aşağıdaki dört önermeyi göz önüne alalım.

S_1 : 2 çift sayıdır **veya** 3 tek sayıdır.

S_2 : 1 çift sayıdır **veya** 3 tek sayıdır.

S_3 : 2 çift sayıdır **veya** 4 tek sayıdır.

S_4 : 3 çift sayıdır **veya** 2 tek sayıdır.

Matematikte "P **veya** Q" ifadesinden, P ile Q önermelerinden birinin *veya her ikisinin* doğru olduğu anlaşılır. Bu nedenle S_1, S_2 ve S_3 önermeleri doğrudur; S_4 ise yanlıştır. "Veya" kelimesini temsil etmek için $\vee$ sembolü kullanılır. Buna göre P ve Q birer önerme ise "P **veya** Q" önermesi $P \vee Q$ ile gösterilir. Bu önermenin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

P	Q	$P \vee Q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Yukarıdaki tabloda ifade edilen "veya" kelimesinin anlamı, günlük konuşma dilinde kullanılan anlamından farklıdır. Bunun bilincinde olmak önemlidir. Örneğin, bir üniversite yetkilisi aşağıdaki tehdidi savursun:

Öğrenim harcını ödersiniz **veya** okuldan ayrılırsınız.

Bu cümleden, öğrenim harcını ödemeniz *veya* okuladan ayrılmanız gerektiğini ancak *her ikisinin birden olmayacağını* anlarsınız. Bizim için "veya" kelimesi, tabloda $\vee$ için belirtilen anlama gelir. Böylece $P \vee Q$ önermesinin doğru olması, P ile Q önermelerinden *birinin veya her ikisinin* doğru olduğu anlamına gelir. Eğer P ve Q önermelerinden sadece birinin doğru olduğunu ifade etmemiz gerekirse aşağıdaki ifadelerden birini kullanabiliriz:

P **veya** Q **ancak ikisi birden değil**.

Ya P **ya da** Q.

P **veya** Q **önermelerinden sadece biri**.

Eğer üniversite yetkilisi bir matematikçi olsaydı, ifadesini şu şekilde daha nitelikli kılabilirdi:

Ya öğrenim harcını ödersiniz **ya da** okuladan ayrılırsınız.

Bu bölümü, eski önermelerden yenilerini elde etmenin başka bir yolundan daha bahsederek bitirelim. Herhangi bir P önermesi verildiğinde "P **doğru değildir**." biçiminde yeni bir önerme oluşturabiliriz. Örneğin,

2 çift sayıdır,

önermesini ele alalım. Bu önerme doğrudur. Şimdi, sonuna "önermesi doğru değildir" kelimelerini ekleyerek bu önermeyi değiştirelim:

2 çift sayıdır **önermesi doğru değildir**.

Elde ettiğimiz bu yeni önerme yanlıştır.

Başka bir örnek olarak, yanlış olan "$2 \in \emptyset$" önermesi ile başlarsak doğru olan "$2 \in \emptyset$ doğru değildir." önermesini elde ederiz.

Yukarıda kullandığımız "doğru değildir" ifadesini $\sim$ sembolü ile temsil ederiz. Buna göre $\sim P$ ifadesi "P **doğru değildir**" anlamına gelir ve "P'nin değili" ya da kısaca "P değil" diye okunur. İki önermeyi birleştiren $\wedge$ ve $\vee$ bağlaçarından farklı olarak, $\sim$ sembolü sadece tek bir önermeyi değiştirir. Bu nedenle doğruluk tablosunun sadece iki tane satırı vardır. Bu satırların her biri P önermesinin bir doğruluk değerlerine karşılık gelir.

P	$\sim P$
D	Y
Y	D

$\sim P$ önermesine P'nin **değili** veya P'nin **olumsuzu** denir. Bir önermenin değili çeşitli şekillerde ifade edilebilir. Örneğin aşağıdaki önerme verilsin.

$P:$ 2 çift sayıdır.

İşte size bu önermenin olumsuzunu ifade etmenin birkaç yolu:

$\sim P$: 2 çift sayıdır önermesi doğru değildir.

$\sim P$: 2 çift sayıdır önermesi yanlıştır.

$\sim P$: 2 çift sayı değildir.

Bu bölümde; önermelerin $\wedge$, $\vee$ ve $\sim$ işlemleri ile nasıl birleştirilebileceğini ya da değiştirilebileceğini öğrendik. Elbette ki bu işlemleri açık önermelere veya önermeler ile açık önermelerin karışımına uygulayabiliriz. Örneğin, (3 tek sayıdır) $\wedge$ (x çift sayıdır) ifadesi, bir önerme ile bir açık önermenin birleşimi olan bir açık önermedir.

Bölüm 2.2 Alıştırmaları

Aşağıdaki her önermeyi veya açık önermeyi $P \wedge Q$, $P \vee Q$ ve $\sim P$ formlarından biriyle ifade ediniz. Ayrıca, P ve Q önermelerinin ne olduklarını belirtmeyi unutmayınız.

1. 8 hem çift sayıdır hem de 2'nin bir kuvvetidir.

2. A matrisi tersinir değildir.

3. $x \neq y$ **4.** $x < y$ **5.** $y \geq x$

6. Sınav Çarşamba veya Cuma günü yapılacak.

7. x sayısı sıfıra eşittir ancak y sayısı sıfıra eşit değildir.

8. x ve y sayılarından en az biri sıfıra eşittir.

9. $x \in A - B$ **10.** $x \in A \cup B$ **11.** $A \in \{X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : |\overline{X}| < \infty\}$

12. Mutlu aileler birbirine benzer ancak her mutsuz ailenin kendine özgü bir mutsuzluğu vardır. (Leo Tolstoy, *Anna Karenina*)

13. İnsanlar iyi olmak ister ama fazlasıyla ve her zaman değil. (George Orwell)

14. Bir insan olan şeyleri aramalı, olması gerektiğini düşündüğü şeyleri değil. (Albert Einstein)

2.3 Koşullu Önermeler

İki önermeyi birleştirmenin başka bir yolu daha vardır. Bir a tamsayısını akılda tutalım. Bu tamsayı hakkında aşağıdaki önerme verilsin:

R : Eğer a tamsayısı 6'nın bir katı ise a tamsayısı 2 ile bölünür.

Tamsayılar hakkındaki bilgimize ve "eğer" ile "ise" kelimelerinin anlamlarına dayanarak bu önermenin doğru olduğunu söyleyebiliriz. Eğer a tamsayısı 6'nın bir katı ise a çifttir. Bu nedenle a tamsayısı 2 ile tam bölünür. Dikkat edilirse R önermesi iki tane basit önermeden oluşmaktadır:

P : a tamsayısı 6'nın bir katıdır.

Q : a tamsayısı 2 ile bölünür.

R : Eğer P ise Q.

Genellersek, P ve Q önermelerinden *"Eğer P ise Q."* formunda yeni bir önerme oluşturabiliriz. Sembolik olarak $P \Rightarrow Q$ şeklinde yazılan bu önermeyi *"Eğer P ise Q."* veya *"P, Q önermesini gerektirir."* diye okuruz. Buradaki $\Rightarrow$ sembolünün, $\wedge$ ile $\vee$ sembollerinde olduğu gibi çok özel bir anlamı vardır: $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olduğu bildirildiğinde, *eğer* P doğru *ise* Q mutlaka doğru olmalıdır. (Bir başka deyişle P önermesinin doğru olması, Q önermesini doğru olmak zorunda bırakır.) $P \Rightarrow Q$ formundaki bir önermeye **koşullu** önerme denir çünkü P doğru olmak *koşuluyla* Q doğrudur.

$P \Rightarrow Q$ önermesini, ne zaman ki P doğru olsa o zaman Q önermesinin de doğru olacağına dair verilmiş bir söz olarak düşünebilirsiniz. Bu sözde durulmamasının (yani yanlış olmasının) tek bir yolu vardır: P doğrudur fakat Q yanlıştır. Buna göre $P \Rightarrow Q$ sözünün doğruluk tablosu şu şekildedir:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Son iki satırda, $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olması sizi rahatsız etmiş olabilir. Bunu açmak için bir örnek verelim. Hocanız şöyle bir söz versin:

Eğer finalden geçer not alır **iseniz** bu dersi geçersiniz.

Aslında hocanız size şu sözü vermektedir:

(Finalden geçer not alırsınız) $\Rightarrow$ (Bu dersi geçersiniz).

Hocanız hangi durumda size yalan söylemiş olabilir? Finalden geçer not alıp alamama ve dersi geçip geçememeye bağlı olarak olası dört senaryo vardır: Bu senaryolar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Finalden geçer not aldınız	Dersi geçtiniz	(Finalden geçer not aldınız) $\Rightarrow$ (Dersi geçtiniz)
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

İlk satır, finali ve dersi geçtiğiniz senaryoyu anlatır. Hocanız verdiği sözü tutmuştur ve üçüncü sütundaki D harfi size doğru söylediğini bildirir. İkinci satırda, finali geçtiniz ancak hocanız sizi dersten bıraktı. Bu durumda hocanız verdiği sözde durmamıştır ve üçüncü sütundaki Y harfi size verdiği sözün bir yalan olduğunu temsil eder.

Üçüncü satır, finalden kadığınız ama yine de dersi geçtiğiniz senaryoyu belirtir. Böyle bir şey nasıl olmuş olabilir? Belki de hocanız size acımıştır. Ama bu onu yalancı yapmaz. Size verdiği tek söz, finali geçtiğinizde dersten de geçeceğinizdir. Size, dersi geçmenin *tek yolunun* finali geçmek olduğunu söylememiştir. Yalan söylemediği için üçüncü sütuna D harfi yazılmıştır.

Son olarak dördüncü satıra bakalım: finalden ve dersten kaldınız. Hocanız size yalan söylememiştir. Dolayısıyla üçüncü sütunda D harfi vardır.

Başka bir örnek olarak aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım:

Eğer bu ay Eylül **ise** bu ay gündönümü olacaktır.

Gündönümü, gece ile gündüzün eşit olduğu gündür. Biri Eylül ayında, diğeri Mart ayında olmak üzere her yıl iki kez gündönümü yaşanır. Yukarıdaki önerme kuşkusuz ki doğrudur çünkü içinde bulunduğumuz ay Eylül olduğu zaman bir gündönümü olacağı iddiası doğrudur. Bu önerme, sembolik olarak aşağıdaki biçimde yazılır:

(Bu ay Eylül ayıdır) $\Rightarrow$ (Bu ay gündönümü olacaktır).

Bu önerme doğrudur ancak P : *"Bu ay Eylül ayıdır."* ve S : *"Bu ay gündönümü olacaktır."* açık önermeleri, hangi ay olduğuna bağlı olarak ya doğrudur ya da yanlıştır. Bu olay, 12 aydan üç tanesi için aşağıda gösterilmiştir. Burada, P yanlış olsa bile $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olduğuna dikkat ediniz.

	Bu ay Eylül ayıdır	Bu ay gündönümü olacaktır	(Bu ay Eylül ayıdır) $\Rightarrow$ (Bu ay gündönümü olacaktır)
Eylül	D	D	D
Mart	Y	D	D
Mayıs	Y	Y	D

Bu örnekteki $P \Rightarrow Q$ önermesi doğru olduğu için P doğru fakat Q yanlış olacak şekilde bir ay yoktur. (Bu durum, 21 Eylül'den önce dünyanın bir asteroit tarafından yok edilme olasılığı göz ardı edildiği sürece geçerlidir.)

Matematikte karşımıza çıkan her *"Eğer P ise Q."* yapısı daima $\Rightarrow$ sembolünün doğruluk tablosunda ifade edilen anlama gelir. Anlamsal bakımdan $P \Rightarrow Q$ ile aynı olan başka ifadeler elbette ki vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Her birinin anlamı, $\Rightarrow$ sembolünün tablosu ile özdeştir.

Eğer P ise Q.
P ise Q.
P olduğunda Q.
Ne zaman ki P, o zaman Q.
P önermesi Q için yeterli bir koşuldur.
Q için P yeter.
Q önermesi P için gerekli bir koşuldur.
P için Q gerekir.
Ancak Q ise P.

$P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Bunların hepsi *"Eğer P ise Q."* yerine kullanılabilir (ve onunla aynı şeyi ifade eder). Bu ifadelerden her birininin anlamını inceleyip onun $P \Rightarrow Q$ ile aynı anlama geldiğine dair kendinizi ikna etmelisiniz. Örneğin, $P \Rightarrow Q$ önermesinde, P'nin doğru olma koşulu Q'nun doğru olması için yeterlidir. Bu nedenele *"P önermesi Q için yeterli bir koşuldur."*

İfade tarzı biraz aldatıcı olabilir. Gündelik bir olay bunları anlamaya yardımcı olabilir. Örneğin, hocanızın verdiği sözü tekrar ele alalım:

(Finalden geçer not alırsınız) $\Rightarrow$ (Bu dersi geçersiniz).

Bunun anlamı, (belki gerekli değildir ama) finalden geçer not almak bu dersi geçmek için yeterlidir. Bu yüzden hocanız size şöyle de diyebilirdi:

Finalden geçer not almak bu dersi geçmek için yeterlidir.

Dersi geçmek için finalden geçer not almak yeterlidir.

Günlük konuşmalarımızda *"Eğer P ise Q."* demek istediğimizde, normal olarak bunu *"Q önermesi P için gerekli bir koşuldur."* veya *"Ancak Q ise P."* şeklinde ifade etmeyiz. Fakat bu tür yapılar matematikte yaygındır. Bunların neden mantıklı olduğunu anlamak için anlamlarını incelemek gerekir. Dikkat edilirse $P \Rightarrow Q$ doğru olduğunda, P'nin doğru fakat Q'nun yanlış olması imkânsızdır. Bu yüzden P'nin doğru olabilmesi için Q'nun mutlaka doğru olması gerekir. Buna göre *"Q önermesi P için gerekli koşuldur."*

Bölüm 2.3 Alıştırmaları

Anlamlarını değiştirmeden, aşağıdakilerin her birini *"Eğer P ise Q."* formunda bir cümleye çeviriniz.

1. Bir matris, determinantı sıfırdan farklı olduğunda tersinirdir.
2. Bir fonksiyonun sürekli olması için türevlenebilir olması yeterlidir.
3. Bir fonksiyonun integrallenebilir olması için sürekli olması gerekir.
4. Polinom olan bir fonksiyon rasyonel fonksiyondur.
5. Bir tamsayı ancak 4 ile tam bölündüğünde 8 ile tam bölünür.
6. Bir yüzeyin yalnızca bir yüzü var olduğunda o yüzey yönlendirilemez.
7. Bir seri mutlak yakınsak olduğunda yakınsaktır.
8. Yakınsaklık yarıçapı r olan bir geometrik seri eğer $|r| < 1$ ise yakınsaktır.
9. Bir fonksiyon sürekli olmak koşulu ile integrallenebilirdir.
10. Diskriminant ancak ikinci dereceden denklemin reel çözümleri yoksa negatiftir.
11. Yazmayı bırakırsan başarısız olursun. (Ray Bradbury)
12. İnsanlar gerçekleri yalnızca, gerçekler zaten inandıkları şeyler ile bağdaşırsa doğru kabul eder. (Andy Rooney)

13. İnsanlar benimle hemfikir olduklarında yanılmam gerektiğini hissediyorum. (Oscar Wilde)

2.4 Çift Koşullu Önermeler

$P \Rightarrow Q$ önermesinin $Q \Rightarrow P$ ile aynı olmadığını bilmek önemlidir. Bunu görmek için aşağıdaki önermelere bakalım:

$$\begin{array}{rcl}(a \text{ tamsayısı 6'nın katıdır}) & \Rightarrow & (a \text{ tamsayısı 2 ile bölünür}),\\ (a \text{ tamsayısı 2 ile bölünür}) & \Rightarrow & (a \text{ tamsayısı 6'nın katıdır}).\end{array}$$

İlk önerme, eğer a tamsayısı 6'nın katı ise onun 2 ile bölündüğünü belirtir. Bu doğrudur çünkü 6'nın herhangi bir katı çifttir ve bu nedenle 2 ile bölünür. İkinci önerme, a'nın 2 ile bölünmesi hâlinde onun 6'nın bir katı olduğunu iddia eder ki bu doğru olmak zorunda değildir. Örneğin, $a = 4$ tamsayısı 2 ile bölünür ancak 6'nın bir katı değildir. Bu nendenle $P \Rightarrow Q$ ile $Q \Rightarrow P$ önermelerinin anlamları genel olarak birbirinden oldukça farklıdır. $Q \Rightarrow P$ koşullu önermesine $P \Rightarrow Q$ önermesinin **karşıtı** denir. O hâlde, koşullu bir önerme ve onun karşıtı tamamen farklı şeyleri ifade eder.

Ancak bazen, düzgün bir şekilde seçilmiş P ve Q için $P \Rightarrow Q$ ve $Q \Rightarrow P$ önermelerinin ikisi birden doğru olabilir. Örneğin, aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım.

$$\begin{array}{rcl}(a \text{ tamsayısı çifttir}) & \Rightarrow & (a \text{ tamsayısı 2 ile bölünür}),\\ (a \text{ tamsayısı 2 ile bölünür}) & \Rightarrow & (a \text{ tamsayısı çifttir}).\end{array}$$

Dikkat edilirse a tamsayısının değeri ne olursa olsun, bu önermelerin ikisi de doğrudur. Hem $P \Rightarrow Q$ hem de $Q \Rightarrow P$ doğru olduğu için $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesi doğrudur.

Şimdi, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesini ifade etmek için kullanacağımız $\Leftrightarrow$ sembolünü verelim: $P \Leftrightarrow Q$ ifadesi $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ile aynı anlama gelir ve *"P ancak ve ancak Q."* veya *"P gerek ve yeter şart Q."* şeklinde okunur. Örneğin, bir a tamsayısı hakkında verilen

$$(a \text{ tamsayısı çifttir}) \Leftrightarrow (a \text{ tamsayısı 2 ile bölünür})$$

önermesi doğrudur. Bu önerme *"Bir a tamsayısı çifttir ancak ve ancak a tamsayısı 2 ile bölünür."* veya *"Bir a tamsayısının çift olması için gerek ve yeter şart a tamsayısının 2 ile bölünmesidir."* diye okunur.

Aşağıda, $\Leftrightarrow$ sembolüne ait doğruluk tablosu verilmiştir. Dikkat edilirse ($\Rightarrow$ sembolünün doğruluk tablosundan) ilk ve son satırda hem $P \Rightarrow Q$ hem de $Q \Rightarrow P$ doğrudur. Buna göre $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ve böylelikle $P \Leftrightarrow Q$ yine o satırlarda doğrudur. Ortadaki iki satırda $P \Rightarrow Q$ veya $Q \Rightarrow P$ önermelerinden biri yanlıştır. Bu nedenle $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ve $P \Leftrightarrow Q$ o satırlarda yanlıştır.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Şimdi "R : (a çifttir) $\Leftrightarrow$ (a tamsayısı 2 ile bölünür)" önermesini bu tablo ile karşılaştıralım. Eğer a çift ise $\Leftrightarrow$ sembolünün her iki tarafında yer alan önermeler doğrudur ve verilen tabloya göre R doğrudur. Eğer a tek ise $\Leftrightarrow$ sembolünün her iki tarafında yer alan önermeler yanlıştır. Verilen tabloya göre R yine doğrudur. O hâlde, a hangi değeri alırsa alsın, R doğrudur. Genel olarak $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğru olması, P ile Q önermelerinin ikisinin birden doğru olması veya ikisinin birden yanlış olması anlamına gelir.

Tahmin edileceği üzere $P \Leftrightarrow Q$ önermesini söylemenin birçok yolu vardır. Aşağıdaki yapıların hepsi $P \Leftrightarrow Q$ anlamına gelir:

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ ancak ve ancak } Q. \\ P \text{ gerek ve yeter şart } Q. \\ P \text{ için } Q \text{ gereklidir ve yeterlidir.} \\ \text{Eğer } P \text{ ise } Q \text{ ve bunun karşıtı.} \end{array}\right\} P \Leftrightarrow Q$$

Bunların ilk üçü, önceki bölümde verilen yapıları birleştirip $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesi ifade eder. Sonuncusundaki *"... ve bunun karşıtı"* kelimeleri, *"Eğer P ise Q."* önermesinin doğru olmasının yanı sıra *"Eğer Q ise P."* önermesinin de doğru olması anlamında kullanılmıştır.

Bölüm 2.4 Alıştırmaları

Anlamlarını değiştirmeden, aşağıdaki cümlelerden her birini *"P ancak ve ancak Q."* biçiminde bir cümle haline getiriniz.

1. Bir A matrisin tersinir olması için $\det(A) \neq 0$ olması gereklidir ve yeterlidir.

2. Türevi sabit olan bir fonksiyon lineerdir ve bunun karşıtı da doğrudur.

3. Eğer $xy = 0$ ise $x = 0$ veya $y = 0$ olur ve bunun karşıtı da doğrudur.

4. Eğer $a \in \mathbb{Q}$ ise $5a \in \mathbb{Q}$ ve $5a \in \mathbb{Q}$ ise $a \in \mathbb{Q}$ olur.

5. Bir olayın maceraya dönüşmesi için birinin onu anlatması gerekli ve yeterlidir. (Jean-Paul Sartre)

2.5 Önermeler için Doğruluk Tabloları

Artık $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ sembollerinin doğruluk tablolarını bilmeniz gerekir. Bunları hem öğrenmeli hem de *özümsemelisiniz*. Bu semboller, birlikte kullanıp daha karmaşık önermeler oluşturulduğu için iyice anlaşılmalıdır.

Örneğin, P ve Q önermelerinden birinin doğru ama her ikisinin birden doğru olmadığını ifade etmek istediğimizi varsayalım. Sembollerden hiç biri tek başına bunu ifade etmez. Ancak sembolleri birleştirip

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

önermesini yazabiliriz. Bunun anlamı tam olarak şudur:

P veya Q doğrudur ancak P ve Q'nun ikisi aynı anda doğru değildir.

Verilen önerme, P ve Q önermelerinin doğruluk değerlerine bağlı olarak ya doğrudur ya da yanlıştır. Bunu görmek için doğruluk tablosunu oluşturalım. Her zamanki gibi P ve Q önermelerinin doğru/yanlış olası kombinasyonlarını dört satırda listeleyerek başlayalım. Üçüncü ve dördüncü sütunları, $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesini oluşturan $(P \vee Q)$ ve $(P \wedge Q)$ önermelerinin doğruluk değerlerine ayıralım. Beşinci sütunda $\sim (P \wedge Q)$ önermesine ait değerleri listeleyelim. Aslında bu değerler, dördüncü sütundaki girdilerin tersleridir. Böylelikle, üçüncü ve beşinci sütunları $\wedge$ sembolü ile birleştirip altıncı sütundaki $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesine ait değerleri elde ederiz.

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$\sim (P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$
D	D	D	D	Y	**Y**
D	Y	D	Y	D	**D**
Y	D	D	Y	D	**D**
Y	Y	Y	Y	D	**Y**

Bu doğruluk tablosu, P ve Q önermelerinden sadece biri doğru olduğunda $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesinin doğru olduğunu söyler yani kastettiğimiz anlamı taşır. (Doğruluk tablosunun orta kısmında üç tane "yardımcı sütun" olduğuna dikkat ediniz. Eğer yaptığınız işlemlerden eminseniz doğruluk tablolarını yazarken bu sütunları yazmasanız da olur.)

Başka bir örnek olarak x ve y birer reel sayı olmak üzere

$xy = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ veya $y = 0$ olmasıdır,

önermesini ele alalım. Bu önerme, $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ ile modellenebilir. Eğer $xy = 0$, $x = 0$ ve $y = 0$ önermelerini P, Q ve R harfleriyle temsil edersek $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ yazabiliriz. Bu ifadede parantez zorunludur. Aksi hâlde bunun $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ mi yoksa $(P \Leftrightarrow Q) \vee R$ mi olduğunu bilemeyiz.

$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesine ait doğruluk tablosu; P, Q ve R önermelerinin her bir D/Y kombinasyonu için bir satır gerektirir. Bu şekilde sekiz olası kombinasyon vardır. Bunlar, aşağıdaki tablonun ilk üç sütunda verilmiştir.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$
D	D	D	D	**D**
D	D	Y	D	**D**
D	Y	D	D	**D**
D	Y	Y	Y	**Y**
Y	D	D	D	**Y**
Y	D	Y	D	**Y**
Y	Y	D	D	**Y**
Y	Y	Y	Y	**D**

Dördüncü sütun, $\vee$ bağlacının doğruluk tablosuna dayanarak doldurulmuştur. Beşinci sütunda ise birinci ve dördüncü sütunlar $\Leftrightarrow$ sembolüyle birleştirilmiştir. Sonuçta elde edilen tablo P, Q ve R önermelerinin tüm değerleri için $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin doğru/yanlış değerlerini listeler.

Dikkat edilirse çeşitli x ve y reel sayılarına karşılık $P : xy = 0$, $Q : x = 0$ ve $R : y = 0$ önermeleri farklı doğruluk değerlerine sahiptir. Ancak $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ her zaman doğrudur. Örneğin $x = 2$ ve $y = 3$ ise P, Q ve R önermelerinin tamamı yanlıştır. Bu senaryo, tablonun son satırında açıklanmıştır ve orada $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ doğrudur. Benzer şekilde, eğer $x = 0$ ve $y = 7$ ise P ve Q doğrudur fakat R yanlıştır. Tablonun ikinci satırında açıklanan bu senaryoda da $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ doğrudur. Aslında $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin her x ve y reel sayısı için doğru olmasının basit bir nedeni vardır: $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi, $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ önermesini temsil eder. Bu önerme *matematiksel olarak doğrudur*. Bu nedenle yanlış olması imkânsızdır.

Tabloda, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin yanlış olduğu satırlar dikkatinizi çekmiş olabilir. O satırlar neden oradadadır? Bunun sebebi, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin yanlış bir önermeyi de temsil edebilecek olmasıdır. Bu görmek için hocanızın dönem sonunda size şöyle bir söz verdiğini hayal edin:

Bu dersi geçmek için gerek ve yeter şart finalden "A" veya "B" almaktır.

Bu söz, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ formundadır ve doğruluk değerleri yukarıdaki tabloda verilmiştir. Şimdi, finalden "A" aldığınızı ancak dersten kaldığınızı düşünün. Bu durumda hocanız size yalan söylemiştir. Burada P yanlıştır, Q doğrudur ve R yanlıştır. Bu senaryo, tablonun altıncı satırında verilmiştir ve gerçekten de $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi orada yanlıştır. (Yani bir yalandır).

Bu örnekten çıkarılacak ders şudur: İnsanlar yalan söyleyebilir ancak doğru bir matematiksel önerme *hiçbir zaman* yalan söylemez.

Bu bölümü, parantezlerle ilgili bir bilgi vererek bitirelim: ~ sembolü, cebirdeki eksi işaretine benzer. Kendisini takip eden ifadeyi olumsuzlaştırır. Bu nedenle $\sim P \vee Q$ ifadesi $(\sim P) \vee Q$ anlamına gelir. Yani $\sim(P \vee Q)$ anlamına gelmez. $\sim(P \vee Q)$ ise $P \vee Q$ önermesinin tamamının olumsuzunu ifade eder.

Bölüm 2.5 Alıştırmaları

Aşağıda, 1 – 9 arasında verilen önermelerin doğruluk tablolarını yazınız:

1. $P \vee (Q \Rightarrow R)$

2. $(Q \vee R) \Leftrightarrow (R \wedge Q)$

3. $\sim(P \Rightarrow Q)$

4. $\sim(P \vee Q) \vee (\sim P)$

5. $(P \wedge \sim P) \vee Q$

6. $(P \wedge \sim P) \wedge Q$

7. $(P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$

8. $P \vee (Q \wedge \sim R)$

9. $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

10. Kabul edelim ki $\big((P \wedge Q) \vee R\big) \Rightarrow (R \vee S)$ yanlış olsun. Buna göre P, Q, R ve S'nin doğruluk değerlerini bulunuz. (Bu soru, doğruluk tablosu olmadan çözülebilir.)

11. Kabul edelim ki P yanlış ama $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ doğru olsun. Buna göre R ve S'nin doğruluk değerlerini bulunuz. (Bu soru, doğruluk tablosu olmadan çözülebilir.)

2.6 Mantıksal Denklik

$P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğruluk tablosuyla ilgilenirken, P ve Q'nun ikisi birden doğru veya ikisi birden yanlış olduğunda $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğru olduğunu muhtemelen fark ettiniz. Başka bir deyişle $P \wedge Q$ veya $\sim P \wedge \sim Q$ önermelerinden az biri doğru ise o zaman $P \Leftrightarrow Q$ da doğrudur. Bu bize $P \Leftrightarrow Q$ ile $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ önermelerinin aynı anlama geldiğini söyler.

Bunun gerçekten de böyle olduğunu görmek için $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ ve $P \Leftrightarrow Q$ önermelerinin doğruluk tabloları yazabiliriz. Bu işi yaparken, iki önermeyi de aşağıdaki gibi aynı tabloya yerleştirmek daha uygundur. (Tablo $\sim P$, $\sim Q$, $P \wedge Q$ ve $\sim P \wedge \sim Q$ ara önermelerine ait yardımcı sütunlar içerir.)

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(P \wedge Q)$	$(\sim P \wedge \sim Q)$	$(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
D	D	Y	Y	D	Y	**D**	**D**
D	Y	Y	D	Y	Y	**Y**	**Y**
Y	D	D	Y	Y	Y	**Y**	**Y**
Y	Y	D	D	Y	D	**D**	**D**

Bu tablo, P ve Q değerleri ne olursa olsun, $P \Leftrightarrow Q$ ve $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ önermelerinin aynı doğruluk değerlerine sahip olduğunu gösterir. Bu durum, $P \Leftrightarrow Q$ ve $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ gibi iki cebirsel ifadenin "girilen" her P ve Q

değişkeni için aynı değere sahip olmasına benzer. Bunu ifade etmek için

$$P \Leftrightarrow Q \quad = \quad (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

yazar ve bu önermelerinin **mantıksal olarak denk** olduklarını söyleriz.

Genellersek, doğruluk tablosundaki doğruluk değerleri satır satır birbirine eşit olan iki önerme **mantıksal olarak denktir**.

Mantıksal denklik önemlidir çünkü aynı şeye farklı (ve muhtemelen yararlı) bir açıdan bakma olanağı sunar. Örneğin, aşağıdaki tablo $P \Rightarrow Q$ ve $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ önermelerinin mantıksal olarak denk olduğunu gösterir.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	$P \Rightarrow Q$
D	D	Y	Y	**D**	**D**
D	Y	Y	D	**Y**	**Y**
Y	D	D	Y	**D**	**D**
Y	Y	D	D	**D**	**D**

Bir çok teorem $P \Rightarrow Q$ formunda olduğu için $P \Rightarrow Q = (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ oldukça kullanışlı bir sonuçtur. Ünite 5'de göreceğimiz üzere $P \Rightarrow Q$ formundaki bir teoremi $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ olarak ifade edip ispatlamak bazen daha kolaydır.

Mantıksal denklik önermelerinden iki tanesi bir isime sahip olacak kadar önemlidir. Bunlar **DeMorgan yasaları** olarak bilinir.

Gözlem 2.1 (DeMorgan Yasaları)

1. $\sim (P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$
2. $\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$

DeMorgan yasalarının ilki aşağıdaki tabloda doğrulanmıştır. Alıştırmalardan birinde de ikinci yasayı doğrulamanız istenecektir.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
D	D	Y	Y	D	**Y**	**Y**
D	Y	Y	D	Y	**D**	**D**
Y	D	D	Y	Y	**D**	**D**
Y	Y	D	D	Y	**D**	**D**

DeMorgan yasaları aslında çok doğaldır. Örneğin, *P ve Q önermelerinin aynı anda doğru olması söz konusu değildir* şeklinde yorumlanabilecek olan $\sim (P \wedge Q)$ önermesini göz önüne alalım. Eğer P ve Q aynı anda doğru değil ise P ve Q'dan en az biri yanlıştır. Bu durumda $(\sim P) \vee (\sim Q)$ doğrudur. O hâlde $\sim (P \wedge Q)$ önermesi $(\sim P) \vee (\sim Q)$ ile aynı anlama gelir.

DeMorgan yasaları çok kullanışlı olabilir. Örneğin, $\sim(P \vee Q)$ formundaki bir önerme doğru olsun. DeMorgan yasalarından ikincisi, $(\sim P) \wedge (\sim Q)$ önermesinin de doğru olduğunu söyler. Böylelikle hem $\sim P$ hem de $\sim Q$ doğrudur. Bu tür ek bilgileri hızlıca elde etmek son derece yararlı olabilir.

Önemli olan bazı mantıksal denklikler aşağıda verilmiştir. Doğru olduğu hemen belli olmayanlar, doğruluk tabloları yardımıyla doğrulanabilir.

$$P \Rightarrow Q \;=\; (\sim Q) \Rightarrow (\sim P) \qquad \text{Karşıt ters kuralı} \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sim(P \wedge Q) &= \sim P \vee \sim Q \\ \sim(P \vee Q) &= \sim P \wedge \sim Q \end{aligned}\right\} \qquad \text{DeMorgan kuralları} \qquad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge Q &= Q \wedge P \\ P \vee Q &= Q \vee P \end{aligned}\right\} \qquad \text{Değişme kuralları} \qquad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned}\right\} \qquad \text{Dağılma kuralları} \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &= (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) &= (P \vee Q) \vee R \end{aligned}\right\} \qquad \text{Birleşme kuralları} \qquad (2.5)$$

Dikkat edilirse $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ile verilen dağılma özelliği, cebirdeki $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ ile verilen dağılma özelliğine benzer. Birleşme özelliğine gelince, $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$ eşitliği parantezlerin gereksiz olduğunu belirtir. Bu nedenle $P \wedge Q \wedge R$ yazmak bir belirsizliğe yol açmaz. Benzer şekilde $P \vee (Q \vee R)$ ifadesindeki parantezler de kaldırılabilir.

Lakin, $P \vee (Q \wedge R)$ önermesinde olduğu gibi $\wedge$ ile $\vee$ bağlaçlarının karışık olarak kullanıldığı durumlarda parantez gereklidir. Gerçekten de $P \vee (Q \wedge R)$ ve $(P \vee Q) \wedge R$ mantıksal olarak denk değildir. (Bkz: Bölüm 2.6, Alıştırma 13.)

Bölüm 2.6 Alıştırmaları

A. Doğruluk tablosu kullanarak, aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz.

1. $P \wedge (Q \vee R) \;=\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

2. $P \vee (Q \wedge R) \;=\; (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

3. $P \Rightarrow Q \;=\; (\sim P) \vee Q$

4. $\sim(P \vee Q) \;=\; (\sim P) \wedge (\sim Q)$

5. $\sim(P \vee Q \vee R) \;=\; (\sim P) \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$

6. $\sim(P \wedge Q \wedge R) \;=\; (\sim P) \vee (\sim Q) \vee (\sim R)$

7. $P \Rightarrow Q \;=\; (P \wedge \sim Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$

8. $\sim P \Leftrightarrow Q \;=\; (P \Rightarrow \sim Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow P)$

B. Aşağıdaki önermelerin mantıksal olarak denk olup olmadıklarını belirleyiniz.

9. $P \wedge Q$ ile $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

10. $(P \Rightarrow Q) \vee R$ ile $\sim((P \wedge \sim Q) \wedge \sim R)$

11. $(\sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$ ile $\sim(Q \Rightarrow P)$

12. $\sim(P \Rightarrow Q)$ ile $P \wedge \sim Q$

13. $P \vee (Q \wedge R)$ ile $(P \vee Q) \wedge R$

14. $P \wedge (Q \vee \sim Q)$ ile $(\sim P) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$

2.7 Niceleyiciler

Birçok cümleyi $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ sembollerini kullanarak simgesel formda yazabiliriz. Daha önce gördüğümüz üzere bu formlar, cümlelerin mantıksal yapısını anlamamıza ve (mantıksal denklikte olduğu gibi) farklı cümlelerin aslında aynı anlama sahip olabileceğini görmemize yardımcı olur.

Ancak bu semboller tek başlarına her önermenin tam anlamını ifade edecek kadar güçlü değildir. Bunu görmek için elemanları tamsayılar olan $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ sonsuz kümesini ele alalım ve *"X kümesinin her elemanı tek sayıdır."* önermesini ifade etmek istediğimizi var sayalım. Eğer $P(x)$ ile *"x tek sayıdır."* açık önermesini temsil edersek verilen önermeyi

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4) \wedge \cdots$$

şeklinde yazmak zorunda kalırız. Benzer şekilde *"X kümesinin en az bir elemanı tektir."* önermesini ifade etmek için de

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee P(x_4) \vee \cdots$$

yazmak zorunda kalırız. Burdaki sorun, ifadelerin sonsuza dek sürmesidir.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için iki tane yeni sembol verelim: $\forall$ sembolünü *"her"* sözcüğü, $\exists$ sembolünü ise *"vardır"* sözcüğü anlamında kullanalım. Buna göre *"X kümesinin her elemanı tek sayıdır."* önermesini sembolik olarak

$$\forall x \in X, P(x)$$

şeklide yazabiliriz. *"X kümesinin en az bir elemanı tektir."* önermesini de

$$\exists x \in X, P(x)$$

şeklide yazabiliriz. Bu yeni sembollere *niceleyiciler* denir.

Tanım 2.1 $\forall$ ve $\exists$ sembollerine **niceleyiciler** denir.

$\forall$ sembolü *"her"* veya *"tüm"* kelimelerine karşılık gelir.

$\exists$ sembolü *"vardır"* veya *"bazı"* kelimelerine karşılık gelir.

Böylelikle

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $2n$ çifttir,

önermesi aşağıdakilerden biriyle ifade edilebilir:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $2n$ çifttir,

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $Ç(2n)$.

Benzer şekilde

Doğal sayılar kümesinin beş elemanlı bir X altkümesi vardır,

önermesi

$\exists X, (X \subseteq \mathbb{N}) \wedge (|X| = 5)$ veya $\exists X \subseteq \mathbb{N}, |X| = 5$ ya da $\exists X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| = 5$

olarak ifade edilebilir.

Buradaki $\forall$ ve $\exists$ sembollerine niceleyiciler denir çünkü bunlar, bir anlamda, kendilerini takip eden değişkenin miktarına (yani tamamına veya bir kısmına) atıfta bulunur. $\forall$ sembolüne **evrensel niceleyici**, $\exists$ sembolüne ise **varlıksal niceleyici** denir. Bunları içeren önermeler **nicelenmiş** önermelerdir. Bir önerme $\forall$ ile başlıyorsa ona **evrensel olarak nicelenmiş** önerme, $\exists$ ile başlıyorsa **varlıksal olarak nicelenmiş** önerme denir.

Örnek 2.5 Aşağıda, sözel önermeler sembolik formlarıyla eşleştirilmiştir.

Tek olmayan her tamsayı çifttir.
$\forall n \in \mathbb{Z}, \sim (n \text{ tektir}) \Rightarrow (n \text{ çifttir})$ veya $\forall n \in \mathbb{Z}, \sim T(n) \Rightarrow Ç(n)$.

Çift olmayan bir tamsayı vardır.
$\exists n \in \mathbb{Z}, \sim Ç(n)$.

Her x reel sayısına karşılık $y^3 = x$ olacak şekilde bir y reel sayısı vardır.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x$.

Herhangi a ve b rasyonel sayıları için ab rasyoneldir.
$\forall a, b \in \mathbb{Q}, ab \in \mathbb{Q}$.

Şimdi ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ vb. ancak sadece bunlarla sınırlı olmayan) bir X kümesi verilsin. Eğer $P(x)$ önermesi her $x \in X$ için doğru ise buradan $\forall x \in X, P(x)$ nicelenmiş önermesin doğru olduğu anlaşılır. Eğer $P(x)$ önermesini yanlış yapan en az bir $x \in X$ var ise $\forall x \in X, P(x)$ önermesi yanlıştır. Benzer şekilde, $P(x)$ doğru olacak şekilde en az bir $x \in X$ var ise $\exists x \in X, P(x)$ önermesi doğrudur; aksi hâlde yanlıştır. Böylelikle, Örnek 2.5'deki her önerme doğrudur. Sırada, yanlış olan nicelenmiş önermelere örnek verelim.

Örnek 2.6 Aşağıda, sembolik formları ile eşleştirilmiş olarak verilen nicelenmiş önermelerin hepsi yanlıştır.

Her tamsayı çifttir.
$\forall n \in \mathbb{Z}, Ç(n)$.

Bir n tamsayısı vardır öyle ki $n^2 = 2$'dir.
$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2.$

Her x reel sayısına karşılık $y^2 = x$ olacak şekilde bir y reel sayısı vardır.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x.$

Herhangi a ve b rasyonel sayıları için $\sqrt{ab}$ rasyoneldir.
$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}.$

Örnek 2.7 İki tane niceleyici içeren önermelerde, niceleyicilerin sırasına dikkat edilmelidir çünkü sıralamayı değiştirmek anlam değişmesine neden olabilir. Örnek 2.5'te verilen aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

Bu önerme doğrudur çünkü x ne olursa olsun $y = \sqrt[3]{x}$ sayısı $y^3 = x$ şartını sağlar. Şimdi niceleyicilerin sırasını değiştirip önermeyi yeniden yazalım:

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

Bu yeni önerme, belli bir y reel sayısı vardır öyleki *bütün* x reel sayılar için $y^3 = x$ olduğunu söyler. Böyle bir özelliğe sahip sayı olamayacağı için bu önerme yanlıştır. Yukarıdaki iki önermenin anlamları tamamen farklıdır.

Nicelenmiş önermeler gündelik konuşmalarda genellikle yanlış kullanılır. Muhtemelen birilerinin *"Öğrenim harcı ödeyenler, örencilerin hepsi değildir."* demek isterken *"Bütün öğrenciler öğrenim harcı ödemez."* dediğini duymuşsunuzdur. Gündelik konuşmalarda belki affedilebilir olan bu hata matematikte asla yapılmamalıdır. *"Bütün tamsayılar çift değildir."* dememelisiniz çünkü bu hiç çift tamsayı olmadığı anlamına gelir. Bunun yerine *"Çift sayılar, tamsayıların hepsi değildir."* diyebilirsiniz.

Bölüm 2.7 Alıştırmaları

Aşağıdakileri birer cümle olarak yazınız. Doğru ya da yanlış olduklarını belirtiniz.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \geq 0$
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ax = x$
4. $\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), X \subseteq \mathbb{R}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| < n$
6. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), |X| < n$
7. $\forall X \subseteq \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, |X| = n$
8. $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \exists X \subseteq \mathbb{N}, |X| = n$
9. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m = n + 5$
10. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, m = n + 5$

2.8 Koşullu Önermeler Üzerine Daha Fazlası

Değişken içeren koşullu önermeler ile ilgili oldukça önemli bir noktayı aydınlatma vakti geldi. Bunun için x tamsayıları hakındaki

$$(x \text{ tamsayısı 6'nın katıdır}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı çifttir}),$$

örneğine geri dönelim. Daha önce de belirtildiği üzere 6'nın her katı çift olduğu için x tamsayısı ne olursa olsun bu önerme doğrudur. Bu gözleme vurgu yaparak, önermeyi aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tamsayısı 6'nın katıdır}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı çifttir}).$$

Şimdi, cümlelerin yerlerini değiştirerek farklı bir önerme yazalım:

$$(x \text{ tamsayısı çifttir}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı 6'nın katıdır}).$$

Bu ifade; x tamsayısının $-6, 12, 18$ vb. bazı değerleri için doğrudur ancak ($2, 4$ vb.) diğer değerleri için yanlıştır. Dolayısıyla, bu bir önerme olmaktan ziyade bir açık önermedir. (Bölüm 2.1'den hatırlanacağı üzere bir *açık önermenin* doğruluk değeri, belirli bir değişkenin veya değişkenlerin değerine bağlıdır.) Ancak bunun önüne evrensel bir niceleyici koyduğumuzda

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tamsayısı çifttir}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır})$$

elde ederiz ki bu kesinlikle yanlıştır. Bu nedenle son ifade bir önermedir yani bir *açık önerme değildir*. Genellersek, bir x tamsayısı hakkında verilen $P(x)$ ve $Q(x)$ açık önermelerini içeren $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ifadesi ya doğrudur ya da yanlıştır. Bu yüzden bu ifade bir önermedir; bir açık önerme değildir.

Şimdi çok önemli olan noktaya geldik. Matematikte; $P(x)$ ve $Q(x)$ herhangi bir X kümesine ait x elemanı hakkındaki açık önermeler olduğunda, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundaki bir ifade $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ *önermesi* olarak anlaşılır. Başka bir deyişle, koşullu bir önermede açıkça belirtilmemiş olsa bile onun önünde gizli bir evrensel niceleyici vardır. Bunun sebebi şudur: $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundaki önemleler matematikte o kadar yaygındır ki onların önüne $\forall x \in X$ yazmaktan yoruluruz.

Sonuç olarak aşağıdaki cümle (tüm x değerleri için doğru olduğundan) doğru bir önermedir:

Eğer x tamsayısı 6'nın katı ise x çifttir.

Ancak, aşağıdaki önerme (her x için doğru olmadığından) yanlıştır:

Eğer x tamsayısı çift ise x tamsayısı 6'nın katıdır.

Bu gözlem, koşullu önermeleri aşağıdaki gibi yorumlamaya yönlendirir. Bu yorum Bölüm 2.3'de verilen ile tutarlıdır ama ondan daha geneldir.

Tanım 2.2 Eğer P ve Q iki önerme ya da açık önerme ise

"Eğer P ise Q,"

bir önermedir. Eğer P doğruyken Q'nun yanlış olması imkânsız ise bu önerme doğrudur. Eğer P doğru fakat Q yanlış olacak biçimde en az bir durum var ise bu önerme yanlıştır.

Böylelikle aşağıdaki önermeler **doğrudur**:

Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise $x^2 + 1 > 0$ olur.

Eğer f fonksiyonu türevlenebilir ise f fonksiyonu süreklidir.

Benzer şekilde, aşağıdaki önermeler **yanlıştır**:

Eğer p asal ise p tektir. (2 asal sayıdır.)

Eğer f fonksiyonu rasyonel ise bir asimptotu vardır. (x^2 rasyoneldir.)

2.9 Türkçenin Sembolik Mantığa Çevirisi

Teoremlerin ispatlarını yazarken (veya okurken), cümlelerin mantıksal yapısına ve anlamına dikkat edilmelidir. Bazen bunları mantık sembolleri içeren ifadelere ayrıştırmak gerekir ya da bunu yapmak yardımcı olur. Bu iş, zihinsel olarak veya bir karalama kâğıdı üzerinde yapılabilir. Bazen de bir ispatın içinde açık bir şekilde yapılabilir. Bu bölümün amacı, mantıksal yapılarını daha iyi anlayabilmeniz için size yazı dilindeki cümleleri sembolik forma aktaracak bir pratik kazandırmaktır. İşte bazı örnekler:

Örnek 2.8 Analiz dersinden bildiğiniz ortalama değer teoremine bakalım:

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir ise $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Bu cümle, sembolik olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\Big((f,\ [a,b]\text{'de sürekli}) \wedge (f,\ (a,b)\text{'de dif.bilir}) \Big) \Rightarrow \Big(\exists\, c \in (a,b), f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Big).$$

Örnek 2.9 Bölüm 2.1'de verilen Goldbach sanısını göz önüne alalım:

2'den büyük olan her çift tamsayı, iki asal sayının toplamıdır.

Asal sayıların kümesi P ve 2'den büyük çift sayıların kümesi $X = \{4, 6, 8, \dots\}$ olsun. Bu cümle aşağıdaki gibi sembolik mantık diline aktarılabilir.

$$(n \in X) \Rightarrow (\exists\, p, q \in P,\, n = p + q)$$
$$\forall\, n \in X, \exists\, p, q \in P,\, n = p + q$$

Goldbach sanısına ait yukarıdaki ifadeler önemli bir noktayı gösterir. Birinci ifade $(n \in X) \Rightarrow Q(n)$ yapısına, ikinci ifade ise $\forall n \in X, Q(n)$ yapısına sahiptir ancak bunların anlamları aynıdır. Bu önemlidir. Evrensel olarak nicelenmiş her önerme, koşullu bir önerme olarak da ifade edilebilir.

Gözlem 2.2 X bir küme ve $Q(x)$ ise her $x \in X$ için x hakkında bir önerme olsun. Aşağıdaki önermeler aynı anlama gelir:

$$\forall\, x \in X, Q(x)$$
$$(x \in X) \Rightarrow Q(x).$$

Bu gözlem oldukça önemlidir çünkü birçok teorem koşullu bir önerme formundadır. (Ortalama değer teoremi buna bir örnektir.) Bir teoremi ispatlarken, onun ne demek istediğini dikkatli bir şekilde düşünmeliyiz. Bazen bir teorem, evrensel olarak nicelenmiş bir önerme formunda verilir fakat onu koşullu bir önerme şeklinde düşünmek daha pratik olabilir. Yukarıdaki gözlemi anlamak, bu iki form arasında geçiş yapabilmemize olanak verir.

Bu bölümü son bir kaç noktaya temas ederek bitirelim. Bir önermeyi sembolik mantık diline aktarırken, onun kastedilmek istenilen anlamına dikkat edilmelidir. Örneğin hemen atlayarak gördüğünüz her "ve" kelimesini $\wedge$ ile, "veya" kelimesini de $\vee$ ile değiştirmemelisiniz. İşte bir örnek:

x ve y tamsayılarından en az biri çifttir.

Buradaki "ve" kelimesinin varlığı sizi şaşırtmasın. Bu önermenin anlamı, sayılardan birinin veya her ikisinin de çift olmasıdır. Bu yüzden "ve" değil "veya" kullanılması gerekir:

(x çifttir) $\vee$ (y çifttir).

Son olarak "ancak" kelimesi, mantıksal olarak "ve" anlamına gelebilir. Örneğin *"x çifttir ancak y tektir"* cümlesi sembolik olarak şöyle ifade edilir:

(x çifttir) $\wedge$ (y tektir).

Bölüm 2.9 Alıştırmaları

Aşağıdaki cümlelerin her birini sembolik mantık dilinde ifade ediniz.

1. Eğer f derecesi 2'den büyük olan bir polinom ise f' sabit değildir.

2. x pozitiftir fakat y pozitif değildir.

3. Eğer x asal ise $\sqrt{x}$ rasyonel değildir.

4. Her p asal sayısına karşılık, $q > p$ olacak şekilde başka bir q asal sayısı vardır.

5. Her ε pozitif sayısına karşılık öyle bir δ pozitif sayısı vardır ki $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ olur.

6. Her ε pozitif sayısına karşılık öyle bir M pozitif sayısı vardır ki $x > M$ olduğunda $|f(x)-b| < \varepsilon$ olur.

7. Her x reel sayısı için $a+x = x$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır.

8. Yüzü olan hiçbir şeyi yemiyorum.

9. Eğer x bir rasyonel sayı ve $x \neq 0$ ise $\tan(x)$ bir rasyonel sayı değildir.

10. Eğer $\sin(x) < 0$ ise $0 \leq x \leq \pi$ olamaz.

11. Aptalları, sarhoşları, çocukları ve Amerika Birleşik Devletleri'ni koruyan bir ilahi taktir vardır. (Otto von Bismarck)

12. Bazı insanları her zaman kandırabilirsiniz; tüm insanları bazı zamanlar kandırabilirsiniz ama her zaman tüm insanları kandıramazsınız. (Abraham Lincoln)

13. Herşey, bir başkasının başına geldiği sürece komiktir. (Will Rogers)

2.10 Önermelerin Olumsuzlaştırılması

Bir R önermesi verilsin. $\sim R$ önermesine R'nin **değili** veya **olumsuzu** denir. Eğer R karmaşık bir önerme ise $\sim R$ önermesi genellikle daha sade veya daha kullanışlı bir formda yazılabilir. Bu formu bulma sürecine, R'nin **olumsuzlaştırılması** denir. Teoremleri ispatlarken, belirli önermelerin olumsuzlaştırılması gerekir. Şimdi bunu nasıl yapacağımızı araştıralım.

Aslında bu konunun bir kısmını inceledik. Bölüm 2.6'da verilen

$$\sim(P \wedge Q) \quad = \quad (\sim P) \vee (\sim Q) \tag{2.6}$$

$$\sim(P \vee Q) \quad = \quad (\sim P) \wedge (\sim Q) \tag{2.7}$$

DeMorgan yasaları, $P \wedge Q$ ile $P \vee Q$ önermelerinin nasıl olumsuzlaştırılacağını gösteren kurallar olarak düşünülebilir. Şimdi, DeMorgan kurallarını kullanıp "ve" ya da "veya" içeren önermelerin nasıl olumsuzlaştırılacağına dair birkaç örnek verelim.

Örnek 2.10 Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştırmak isteyelim:

R : Çarpanlarına ayırıp veya kuadratik formülü kullanıp çözebilirsin.

Bu önerme, (Çarpanlarına ayırıp çözebilirsin) $\vee$ (Kuadratik formülü kullanıp çözebilirsin) anlamına gelir. Bunu $P \vee Q$ ile gösterirsek, olumsuzu

$$\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

ile verilir. Bu nedenle, R önermesinin değili aşağıdaki şekildedir:

$\sim R$: Çarpanlarına ayırıp çözemezsin ve kuadratik formülü kullanıp çözemezsin.

Eğer $\sim R$ önermesini DeMorgan yasalarını kullanmadan bulabildiyseniz bu iyiye işarettir çünkü DeMorgan yasalarını özümsediğinizi ve onları bilinçaltından kullandığınızı gösterir.

Örnek 2.11 Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştıralım:

R : x ve y sayılarının her ikisi de tektir.

Bu önerme, (x tektir) $\wedge$ (y tektir) anlamına gelir. Buna göre olumsuzu

$$\begin{aligned} \sim \big((x \text{ tektir}) \wedge (y \text{ tektir})\big) &= \sim (x \text{ tektir}) \vee \sim (y \text{ tektir}) \\ &= (x \text{ çifttir}) \vee (y \text{ çifttir}) \end{aligned}$$

ile verilir. Bu nedenle R'nin değili aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir:

$\sim R$: x çifttir veya y çifttir.
$\sim R$: x ve y sayılarından en az biri çifttir.

Şimdi biraz farklı bir soru tipine bakalım. Çoğu zaman, nicelenmiş önermeleri olumsuzlaştırmak gerekir. Örneğin, $\sim (\forall x \in \mathbb{N}, P(x))$ önermesini ele alalım. Bu önermeyi sözel olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$P(x)$ önermesinin her x doğal sayısı için doğru olması söz konusu değildir.

Buna göre en az bir x için $P(x)$ yanlıştır. Bunu sembolik olarak $\exists x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ şeklinde yazabiliriz. Böylece $\sim (\forall x \in \mathbb{N}, P(x)) = \exists x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ olur. Aynı mantıkla $\sim (\exists x \in \mathbb{N}, P(x)) = \forall x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ olduğunu görebilirsiniz. Genellersek,

$$\sim \big(\forall x \in X, P(x)\big) = \exists x \in X, \sim P(x), \tag{2.8}$$

$$\sim \big(\exists x \in X, P(x)\big) = \forall x \in X, \sim P(x). \tag{2.9}$$

Bu iki mantıksal denkliği *anladığınızdan* emin olunuz. Gündelik konuşma diliyle uyumlu olan bu denklikler önermelerin anlamını matematiksel olarak açık bir şekilde ortaya koyar.

Örnek 2.12 Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştıralım:

R : Her reel sayının karesi negatif değildir.

Bu önerme, sembolik olarak $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ biçiminde yazılabilir. Böylece, R önermesinin değili $\sim (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0) = \exists x \in \mathbb{R}, \sim (x^2 \geq 0) = \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ile verilir. Şimdi bunu sözel olarak ifade edelim:

$\sim R$: Öyle bir reel sayı vardır ki o sayının karesi negatiftir.

Dikkat edileceği üzere R doğrudur fakat $\sim R$ yanlıştır. Yukarı yaptığımız gibi $\sim R$ önermesini Eşitlik (2.8)'i kullanamadan da bulabilirsiniz. Eğer öyleyse iyi yoldasınız; değilse bunu muhtemelen yakında yapabileceksiniz.

Örnek 2.13 Birden fazla niceleyici içeren önermeleri olumsuzlaştırmak için Eşitlik (2.8) ve (2.9)'un art arda birçok defa kullanılması gerekebilir. Aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım:

S : Her x reel sayısı için öyle bir y reel sayısı vardır ki $y^3 = x$ olur.

Bu önerme, her x reel sayısının bir küp köke sahip olduğunu iddia eder ki bu doğrudur. S önermesi, sembolik olarak

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu önermenin olumsuzu üzerinde çalışalım:

$$\begin{aligned}
\sim (\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x) &= \exists x \in \mathbb{R}, \sim (\exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x) \\
&= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sim (y^3 = x) \\
&= \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^3 \neq x.
\end{aligned}$$

Böylece, verilen önermenin değili yanlıştır ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$\sim S$: Öyle bir x reel sayısı vardır ki her y reel sayısı için $y^3 \neq x$ olur.

$\sim S$: Bütün y reel sayıları için $y^3 \neq x$ olacak şekilde bir x reel sayısı vardır.

İspatları yazarken bazen $P \Rightarrow Q$ koşullu önermesini olumsuzlaştırmak gerekir. Bu bölümün geri kalan kısmında bunun nasıl yapılacağını açıklayalım. Başlangıç olarak *"$P \Rightarrow Q$ yanlıştır"* anlamına gelen $\sim (P \Rightarrow Q)$ önermesine bakalım. Doğruluk tablolarından bildiğimiz üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin yanlış olmasının tek yolu vardır: P doğrudur fakat Q yanlıştır. O hâlde,

$$\sim (P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q. \tag{2.10}$$

(Aslında, Bölüm 2.6'nın 13. alıştırmasında bir doğruluk tablosu kullanarak bu iki önermenin mantıksal olarak denk olduklarını gösterdiniz.)

Örnek 2.14 Belirli bir a (sabit) sayısı hakkında verilen aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştırınız.

R : Eğer a tek sayı ise a^2 de tek sayıdır.

Eşitlik (2.10)'u kullanarak, aşağıdaki olumsuz önermeyi elde ederiz.

$\sim R$: a tek sayıdır ve a^2 tek sayı değildir.

Örnek 2.15 Bu örnek, öncekine benzer ancak sabit bir a sayısı yerine x değişkeni kullanılır. Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştıralım.

R : Eğer x tek sayı ise x^2 de tek sayıdır.

Bölüm 2.8'de bahsedildiği üzere bu önerme, evrensel olarak nicelenmiş

$R : \forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tek sayıdır}) \Rightarrow (x^2 \text{ tek sayıdır})$

önermesi olarak yorumlanır. Şimdi, Eşitlik (2.8) ve (2.10)'u kullanarak R'nin değilini bulalım:

$$\begin{aligned}\sim \big(\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tektir}) \Rightarrow (x^2 \text{ tektir})\big) &= \exists x \in \mathbb{Z}, \sim \big((x \text{ tektir}) \Rightarrow (x^2 \text{ tektir})\big)\\ &= \exists x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tektir}) \wedge \sim (x^2 \text{ tektir}).\end{aligned}$$

Bunu sözel olarak ifade edelim:

$\sim R$: Karesi tek sayı olmayan bir tek tamsayı vardır.

Dikkat edileceği üzere R doğrudur fakat $\sim R$ yanlıştır.

Örnek 2.15, $P \Rightarrow Q$ koşullu önermesinin nasıl olumsuzlaştırılacağını gösterir. Bu tarz bir problem, bazen daha karmaşık olumsuzlaştırma problemleri içinde ortaya çıkabilir. Aşağıdaki 5. alıştırmaya (ve çözümüne) bakınız.

Bölüm 2.10 Alıştırmaları

Aşağıdaki önermeleri olumsuzlaştırınız.

1. x pozitiftir fakat y pozitif değildir.

2. Eğer x asal ise $\sqrt{x}$ rasyonel değildir.

3. Her p asal sayısına karşılık, $q > p$ olacak şekilde başka bir q asal sayısı vardır.

4. Her ε pozitif sayısına karşılık öyle bir δ pozitif sayısı vardır ki $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur.

5. Her ε pozitif sayısına karşılık öyle bir M pozitif sayısı vardır ki $x > M$ olduğunda $|f(x) - b| < \varepsilon$ olur.

6. Her x reel sayısı için $a + x = x$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır.

7. Yüzü olan hiçbir şeyi yemiyorum.

8. Eğer x bir rasyonel sayı ve $x \neq 0$ ise $\tan(x)$ bir rasyonel sayı değildir.

9. Eğer $\sin(x) < 0$ ise $0 \le x \le \pi$ olamaz.
10. Eğer f derecesi 2'den büyük olan bir polinom ise f' sabit değildir.
11. Bütün insanları her zaman kandırabilirisiniz.
12. İki kötülük arasında bir seçim yapmak zorunda kaldığımda, henüz denemediğim şeyi seçerim. (Mae West)

2.11 Mantıksal Çıkarım

$P \Rightarrow Q$ koşullu önermesinin doğru olduğu bilinsin. Bu bilgi bize, ne zaman ki P doğrudur o zaman Q da doğrudur der. Fakat $P \Rightarrow Q$ önermesinin kendi başına doğru olması P'nin veya Q'nun doğru olması anlamına gelmez (bunların ikisi birden yanlış ya da P yanlış, Q doğru olabilir). Bununla birlikte P önermesinin de doğru olduğu biliniyor ise o zaman Q mutlaka doğru olmalıdır. Buna **akıl yürütme** veya **mantıksal çıkarım** denir. İki tane doğru önermeden üçüncü bir önermenin doğru olduğu sonucu çıkarılmıştır. İşin özü itibariyle $P \Rightarrow Q$ ve P önermeleri "üst üste eklenerek" Q önermesi elde edilmiştir. Bu durumu $P \Rightarrow Q$ ve P önermelerini alt alta yazıp, onları Q önermesinden bir çizgi ile ayırarak aşağıdaki gibi temsil edebiliriz. Burada anlatılmak istenilen şey, $P \Rightarrow Q$ ile P önermelerin birleşerek Q önermesini üretmesidir.

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Bu çok sık kullanılan bir düşünce kalıbıdır. (Aslında, sayfa 34'deki örnekte kullandığımız kalıp budur.) Bunun bir adı bile vardır: **öncülü doğrulama**.

Aşağıda, **öncülü reddetme** ve **eleme** adı verilen iki tane daha mantıksal çıkarım verilmiştir. Her iki durumda da (ilgili doğruluk tablolarına dayanarak) çizginin üstündeki önermelerin doğru olmasının, çizginin altındaki önermenin doğru olmasını gerektireceğine dair kendinizi ikna etmelisiniz.

Öncülü Doğrulama	Öncülü Reddetme	Eleme
$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$	$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$	$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$

Bu kuralları bilmek önemlidir. (Zaten, öncülü doğrulama ve elemeyi en azından günlük hayatta kullanmaktayız.) Ancak isimlerini hatırlamanıza gerek yoktur. Her zaman kullanmalarına rağmen matematikçilerin çok azı bunların isimlerini hatırlar. Önemli olan isimler değil kurallardır.

Aşağıda, üç tane daha mantıksal çıkarım verilmiştir. Bunlardan ilki çok açık bir gözlemi belirtir: P ve Q önermelerinin ikisi birden doğruysa $P \wedge Q$ önermesi de doğrudur. Bunun yanı sıra $P \wedge Q$ önermesinin doğru olması, P (ve aynı zamanda Q) önermesinin doğru olmasını gerektirir. Son olarak eğer P doğru ise, Q ne olursa olsun, $P \vee Q$ doğru olmalıdır.

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} P \wedge Q \\ \hline P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} P \\ \hline P \vee Q \end{array}$$

Yeterince açık oldukları için bu çıkarımlardan neredeyse hiç bahsedilmez. Ancak bunlar, ispat cümlelerinde sıklıkla kullanacağımız mantıksal çıkarım kalıplarını temsil eder. Bu nedenle, yukarıdaki çıkarımları kullanırken bu gerçeğin farkında olmamız gerekir.

2.12 Önemli Bir Not

Mantık öğrenme sebeplerini bilmek önemlidir. Aslında bunun üç önemli nedeni vardır. Birincisi; doğruluk tabloları bize "ve," "veya," "değil" vb. kelimelerin net anlamlarını söyler. Örneğin *"Eğer ... ise"* yapısını matematiksel bağlamda kullandığımızda, mantık bunun tam olarak ne anlama geldiğini bize bildirir. İkincisi; mantıksal çıkarım kuralları, bilinen bilgiyi kullanarak yeni bilgiler (önermeler) üreteceğimiz bir sistem sunar. Son olarak; DeMorgan yasaları gibi mantıksal kurallar, belirli önermeleri yine onlarla aynı anlama sahip olan (fakat daha kullanışlı) önermelere dönüştürmemize olanak verir. Böylelikle mantık, önermelerin anlamlarını kavramamıza ve yeni önermeler üretmemize yardımcı olur.

Mantık, önermeleri bir arada tutan bir yapıştırıcıdır. Bize, *"Eğer ... ise"* veya *"her"* gibi anahtar niteliğindeki belirli yapıların net anlamlarını açıkça belirtir. Mantık, tüm matematikçilerin kullandığı ortak dildir. Bu nedenle, matematiği anlamak ve aktarmak için onu çok iyi bilmek gerekir.

Ancak mantık, bu temel rolüne rağmen, yaptıklarımızın ön planında değil arka planında bulunur. Bu noktadan itibaren $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$, $\forall$ ve $\exists$ gibi zarif sembolleri nadiren yazacağız. Ama bunların anlamlarının daima farkında olmamız gerekir. Matematiksel bir cümleyi okurken veya yazarken, bu sembolleri kullanarak cümleyi zihnimizde ya da kağıt üzerinde çözümler ve böylece onun doğru ve açık anlamını kavrayabiliriz.

ÜNİTE 3

Sayma

Üniversite düzeyindeki bir kitabın sayma üzerine bir ünite içermesi biraz tuhaf görünebilir. Sayma, en basit haliyle, bir topluluktaki her bir nesneyi işaret edip, nesnelerin miktarını belirleyene kadar *"bir, iki, üç, ..."* diye söylemektir. Bu ne kadar zor olabilir ki? Aslında sayma işlemi oldukça karmaşık bir hâl alabilir. Bu ünitede, sayma kurallarının inceliklerini araştıracağız. Amacımız *"Kaç tane?"* sorusuna cevap vermektir. Ancak nesneleri bireysel olarak tek tek saymak yerine, bunu kısa yoldan yapmamıza olanak veren matematiksel yöntemleri inceleyeceğiz. Saymak istediğimiz şeyleri çoğunlukla bir küme olarak gruplandırabiliriz. Bu nedenle kümeler burada önemli bir rol oynar. *Liste* kavramı da oldukça kullanışlıdır.

3.1 Listeler

Liste, sıralı bir nesneler dizisidir. Bir listeyi belirtmek için önce bir parantez açılır, ardından nesneler virgüllerle ayrılarak yazılır ve sonra parantez kapatılır. Örneğin (a,b,c,d,e) ifadesi, İngiliz alfabesindeki ilk beş harfin sıralanmasıyla oluşan bir listedir. Buradaki a,b,c,d,e nesnelerine listenin **girdileri** denir. Listenin ilk girdisi a, ikinci girdisi b harfidir. İsimlendirme bu şekilde devam eder. Eğer girdilerin sırası değiştirilirse yeni bir liste elde edilir. Örneğin,

$$(a,b,c,d,e) \neq (b,a,c,d,e).$$

Listeler kümelere benzer. Ancak, bir nesneler topluluğu olmaktan ziyade, liste girdilerin belirli bir *sırası* vardır. Hatırlanacağı üzere kümelerde

$$\{a,b,c,d,e\} = \{b,a,c,d,e\}$$

olur ancak –yukarıda belirtildiği gibi– bu eşitlik listeler için doğru değildir.

Kümelerin aksine listelerin girdileri tekrar edebilir. Örneğin (S,O,S) ve $(5,3,5,4,3,3)$ gayet makul birer listedir. Bir listenin **uzunluğu**, o listenin girdi sayısıdır. Buna göre (S,O,S) listesinin uzunluğu üçtür, $(5,3,5,4,3,3)$ listesinin uzunluğu altıdır.

Birkaç örnek daha verelim: $(a,15)$ uzunluğu iki olan bir listedir. Benzer şekilde $(0,(0,1,1))$ uzunluğu iki olan bir listedir. Bu listenin ikinci girdisi üç uzunluğunda bir listedir. Aynı sıradaki aynı elemanlardan oluşan iki liste **eşittir**. O hâlde eşit listeler aynı sayıda girdiye sahiptir. Farklı uzunluklara sahip iki liste eşit olamaz. Buna göre $(0,0,0,0,0,0) \neq (0,0,0,0,0)$ olur. Ayrıca

$$(a,l,ı,ş,v,e,r,i,ş,\ l,i,s,t,e,s,i) \quad \neq \quad \left(\boxed{\begin{array}{l}\text{ekmek}\\ \text{süt}\\ \text{yumurta}\\ \text{muz}\\ \text{kahve}\end{array}} \right)$$

olduğuna dikkat edilmelidir çünkü soldaki listenin 16 girdisi, sağdakinin ise sadece bir girdisi (üzerinde bazı kelimeler yazan bir kâğıt parçası) vardır.

Hiç bir girdisi olmayan çok özel bir liste vardır. Bu listeye **boş liste** denir ve () ile gösterilir. Bu aynı zamanda uzunluğu sıfır olan tek listedir.

Kolaylık açısından, listeleri parantez ve hatta virgül kullanmadan yazabiliriz. Örneğin, herhangi bir karmaşaya yol açmayacaksa (S,O,S) yerine SOS yazabiliriz. Ancak bu şekildeki bir kullanım belirsizliğe yol açabilir. Örneğin $(9,10,11)$ listesini 9 10 11 şeklinde yazmak onu $(9,1,0,1,1)$ ile karıştırmamıza sebep olabilir. Bu nedenle parantez/virgül notasyonunu kullanmak ya da en azından $9,10,11$ biçiminde yazmak en iyisidir. Parantez ve virgül kullanmadan yazılan semboller listesine bir **dize** denir.

Bir madeni parayı on kez atma deneyi, örneğin $TTYTYYYTTY$ şeklinde bir dizeyle temsil edilebilir. İki kez atmak YY, YT, TY veya TT olaylarından biriyle sonuçlanır. Sıfır defa atmaksa $()$ boş listesiyle temsil edilir.

Bir zarı beş defa atıp sonuçları kaydettiğimizi düşününelim. Bu deney (⚂,⚄,⚂,⚀,⚅) ifadesi gibi bir listeyle temsil edilebilir. (Bu liste, zarlardan ilkinin ⚂, ikincisinin ⚄, üçüncüsün ⚂ vb. geldiğini belirtir.) Bu listeyi ⚂⚄⚂⚀⚅ ya da kısaca $3,5,3,1,6$ biçiminde yazabiliriz.

Şimdi biri beyaz diğeri siyah iki zarı aynı anda attığımızı düşünelim. Bu deneyin tipik bir sonucu {⚃,⚁} gibi bir kümeyle modellenebilir. Zarları altı kez atmak, aşağıdaki gibi altı sonuçtan oluşan bir listeyle temsil edilebilir:

({⚃,⚁}, {⚂,⚄}, {⚅,⚅}, {⚀,⚀}, {⚀,⚁}, {⚁,⚂}).

Bu listeyi kısaca ⚃⚁,⚂⚄,⚅⚅,⚀⚀,⚀⚁,⚁⚂ biçiminde de yazabiliriz.

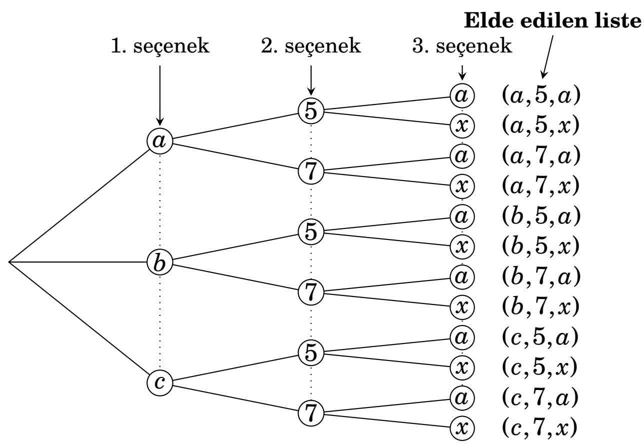
Listeler önemlidir çünkü birçok gerçek dünya problemi listelerle ifade edilerek anlaşılır. Telefon numaranız on rakamlı bir listedir. (Bu listede sıralama önemlidir çünkü rakamları yeniden sıralamak farklı bir telefon numarası verir.) *Bayt*, önemli başka bir liste örneğidir. Bir bayt, uzunluğu sekiz olan ve 0 ile 1 rakamlarından oluşan bir listedir. Bilgi teknolojileri dünyası bayt üzerine kuruludur. Yukarıdaki örnekler, (bir zarın iki kez atılması gibi) çok-adımlı süreçlerin de listelerle modellenebileceğini gösterir.

Şimdi listeleri sayma veya sıraya koyma yöntemlerini araştıralım.

3.2 Çarpma İlkesi

Birçok uygulama problemi, belirli bir özelliği veya koşulu sağlayan olası listelerin sayısını saymayı gerektirir.

Örneğin ilk girdisi $\{a,b,c\}$ kümesine, ikici girdisi $\{5,7\}$ kümesine ve üçüncü girdisi de $\{a,x\}$ kümesine ait olan üç uzunluğunda bir liste yapmak istediğimizi varsayalım. Meselâ $(a,5,a)$ ve $(b,5,a)$ bu türdeki listelerden iki tanesidir. Bu türde toplam kaç liste vardır? Bu soruyu cevaplamak için ilk önce birinci girdiyi, ardından ikinci girdiyi ve sonrasında da üçüncü girdiyi seçtiğimizi düşünelim. Bu süreç, Şekil 3.1'de açıklanmıştır. Listenin ilk girdisi için olan seçenekler a, b ve c harfleridir. Diyagramın sol tarafı, her biri bir seçeneğe karşılık gelecek biçimde üç yönde dallanır. Bu seçim yapıldıktan sonra, ikinci girdi için iki seçenek (5 veya 7) vardır. Bu seçenekler, grafiksel olarak, ilk girdi için yapılan üç seçimden her birinin ikişer tane dal vermesiyle temsil edilir. Bu modelleme, üçüncü girdi için yapılacak olan a veya x seçimleri için tekrarlanır. Bu şekilde diyagramın solundan sağına doğru $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ tane yol elde edilir. Bunların her biri, listenin girdileri için yapılan belirli bir seçime karşılık gelir. Her bir yola karşılık gelen liste, o yolun sağ ucuna yazılmıştır. Dolayısıyla, başlangıçta sorduğumuz soruya cevap olarak, belirtilen özellikte 12 tane olası liste vardır.



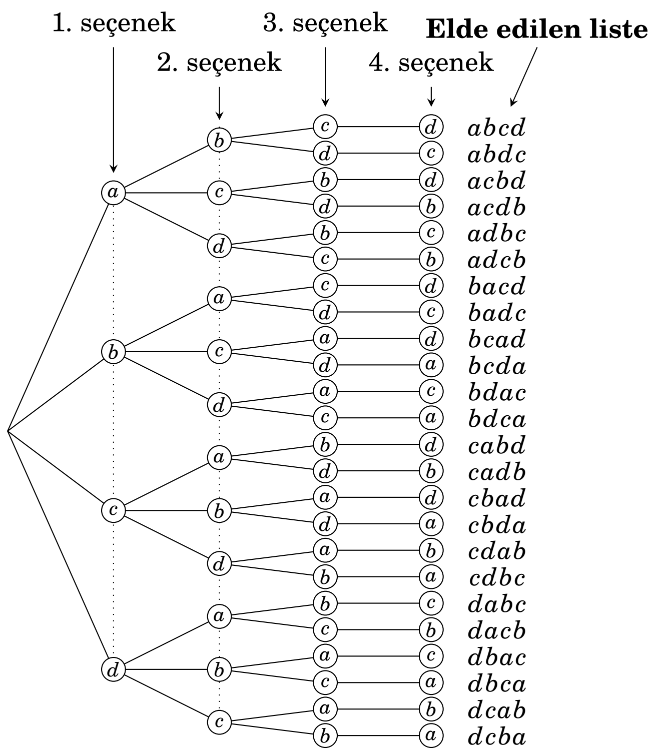
Şekil 3.1: Uzunluğu 3 olan listelerin oluşturulması

Yukarıdaki örneğin ilk girdisi için 3 seçenek, ikinci girdisi için 2 seçenek ve üçüncü girdisi için de 2 seçenek vardır. Olası listelerin toplam sayısı, seçenek sayılarının çarpımı olan $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ sayısıdır. Bu şekilde akıl yürütme, *çarpma ilkesi* olarak adlandırdığımız yöntemin bir örneğidir. Bu yöntemi açıklamadan önce bir örnek daha verelim.

Tekrar eden bir harf içermemek koşuluyla $\{a,b,c,d\}$ harflerinden oluşan ve uzunluğu 4 olan bir liste yapmak istediğimizi varsayalım. Örneğin, $abcd$ ve $cadb$ bu türdedir ancak $aabc$ ve $cacb$ değildir. Bu türde kaç liste vardır?

Bu soruyu, her bir liste girdisi için yapılabilecek seçimleri temsil eden bir ağaç kullanarak inceleyelim. Böyle bir listeyi oluşturmaya ilk girdiyle başlayabiliriz. Bu girdi için a,b,c veya d harflerinden yapılabilecek dört seçenek vardır. Ağacın sol köşesi bu seçeneklerin her birine bir dal verecek şekilde açılır. İlk girdi için seçilen harf, o listede tekrar kullanılamaz. Bu nedenle ikinci girdi için geriye 3 seçenek kalır. Birinci ve ikinci girdiler için birer harf seçildikten sonra, bu harfler üçüncü girdi olarak kullanılamaz. Bu noktada yapılabilecek sadece 2 seçenek vardır. Dördüncü girdiye geldiğimizde, elde kalan son harfi kullanmak zorunda kalırız. Bir başka deyişle, yapılabilecek 1 seçenek kalır.

Bu süreç; ilk girdi için 4 harf, ikinci girdi için 3 harf, üçüncü girdi için 2 harf ve dördüncü girdi için de 1 harf seçerek yapılabilecek tüm olası listelerin nasıl oluşturulacağını gösteren aşağıdaki ağaçta açıklanmıştır. Buradan, toplam liste sayısının $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ yani 24 olduğu görülebilir.



Şekil 3.2: Uzunluğu 4 olan tekrarsız listelerin oluşturulması

Bu ağaçlar; belirli bir sürece tabi tutularak oluşturulan liste sayısının, her bir girdi için yapılabilecek seçim sayılarının çarpımına eşit olduğunu gösterir. Bu şekildeki akıl yürütmeyi bir gözlem olarak özetleyelim.

Gözlem 3.1 (Çarpma İlkesi) Uzunluğu n olan bir liste yapılırken; ilk girdi için a_1 tane olası seçenek, ikinci girdi için a_2 tane olası seçenek, üçüncü girdi için a_3 tane olası seçenek vb. olduğunu kabul edelim. Bu şekilde yapılabilecek birbirinden farklı liste sayısı $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ tanedir.

Çapma ilkesini kullanırken, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ tane dalı olan bir ağaç çizmek zorunda **değilsiniz**. Sadece seçenek sayılarını çarpmanız yeterlidir!

Örnek 3.1 Amerika Birleşik Devletleri'ndeki standart bir plaka, üç harf ve onu takip eden dört sayıdan oluşur. Örneğin, $JRB-4412$ ve $MMX-8901$ standart plakalardan ikisidir. Kaç tane farklı standart plaka olabilir?

Çözüm: $JRB-4412$ gibi standart bir plaka, uzunluğu 7 olan $(J,R,B,4,4,1,2)$ listesine karşılık geldiği için bu türdeki olası listeleri saymak yeterlidir. Çarpma ilkesini kullanalım. Listenin ilk girdisi için $a_1 = 26$ (alfabenin[1] her harfi için bir tane) seçenek vardır. Benzer şekilde ikinci girdi için $a_2 = 26$ seçenek, üçüncü girdi için $a_3 = 26$ seçenek vardır. Dördüncü girdi için $a_4 = 10$ tane seçenek vardır. Aynı şekilde $a_5 = a_6 = a_7 = 10$ olur. Bu nedenle, toplamda $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ **175.760.000 adet olası standart plaka bulunmaktadır**.

Örnek 3.2 Bir latte sipariş ederken tam yağlı, yağsız veya soya sütü; küçük, orta veya büyük boy; bir veya iki ölçü espresso seçenekleri olsun. Buna göre kaç farklı sipariş verilebilir?

Çözüm: Yapılacak sipariş (süt, boy, ölçü) listesiyle modellenebilir. İlk girdi için 3, ikinci girdi için 3 ve üçüncü girdi için ise 2 seçenek vardır. Çarpma ilkesi gereğince toplam $3 \cdot 3 \cdot 2 =$ **18** tane seçenek vardır.

İki çeşit liste sayma problemi vardır. Bir tarafta, plakalar ve telefon numaralarında olduğu gibi listenin girdileri tekrar edebilir. Örneğin, birden çok C ve 4 sembolleri içeren $CCX-4144$ dizisi gayet geçerli bir plakadır. Diğer tarafta, Örnek 3.2'deki (süt, boy, ölçü) listesinde olduğu gibi bazı listelerde sembollerin tekrar etmesi bir anlam ifade etmeyebilir ya da buna izin verilmez. İlk liste türünde *tekrar kullanıma izin verildiğini*, ikinci liste türünde ise *tekrar kullanıma izin verilmediğini* belirtiriz. (Tekrar kullanıma izin verilmeyen listeleri **tekrarsız liste** olarak adlandırırız.) Aşağıdaki örnek bu ikisi aradaki farkı açıklar.

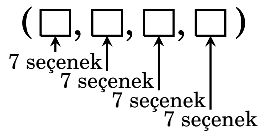
[1] İngiliz alfabesinde 26 harf vardır.

Örnek 3.3 A, B, C, D, E, F, G harflerinden oluşturulan ve uzunluğu 4 olan listeleri düşünelim.

(a) Tekrar kullanıma izin verilen kaç liste oluşturulabilir?
(b) Tekrar kullanıma izin **verilmeyen** kaç liste oluşturulabilir?
(c) Tekrar kullanıma izin **verilmeyen** listelerden kaçı E harfini içerir?
(d) Tekrar kullanıma izin verilen listelerden kaçı E harfini içerir?

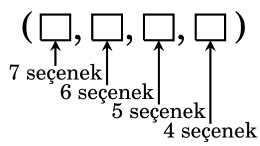
Çözümler:

(a) Listeyi; aşağıda gösterildiği gibi A,B,C,D,E,F ve G harflerinden yapılan seçimlerle doldurmak istediğimiz dört kutu biçiminde düşünelim.



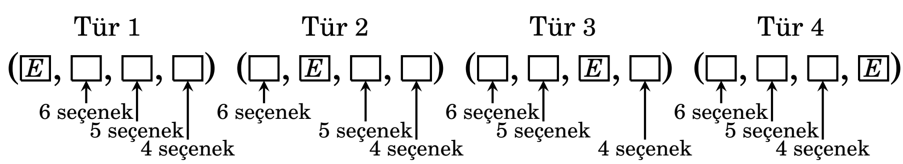
Her bir kutu için yapılabilecek yedi tane seçim vardır. Çarpma ilkesi, bu şekildeki toplam liste sayısının $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \mathbf{2401}$ adet olduğunu söyler.

(b) Bu soru, sembollerin tekrar kullanımına izin verilmemesi dışında öncekiyle aynıdır. İlk kutu için yedi farklı seçim yapılabilir. Bu kutu doldurulduktan sonra içinde yer alan sembol bir daha kullanılamaz. Bu nedenle ikinci kutu için altı tane farklı seçenek kalır. İkinci kutu doldurulduktan sonra iki harf kullanılmış olur. Buna göre üçüncü kutu için geriye beş seçenek kalır. Son olarak üçüncü kutu da doldurulduğunda son kutu için sadece dört tane harf kalır.



Buna göre girdileri tekrar etmeyen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{840}$ adet liste vardır.

(c) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve içinde E harfini barındıran 4 uzunluklu listeleri saymamız istenmektedir. E harfi bu listede sadece bir defa kullanılabilir. Bu listeleri; E harfinin birinci, ikinci, üçüncü veya dördüncü girdi olarak kullanıldığı dört kategoriye ayıralım. Bu dört kategori aşağıda verilmiştir.



İlk girdi olarak E harfinin kullanıldığı birinci liste türünü göz önüne alalım. İkinci girdi için geriye altı seçenek (A,B,C,D,F veya G), üçüncü girdi için beş seçenek ve dördüncü girdi için ise dört seçenek vardır. Dolayısıyla ilk girdisi E olan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ tane liste vardır. Yukarıdaki diyagramda gösterildiği gibi ikinci, üçüncü veya dördüncü girdisi E olan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$'şer tane liste vardır. Böylece, sadece bir tane E içeren $120 + 120 + 120 + 120 =$ **480** adet tekrarsız liste vardır.

(d) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilen, E harfini içeren ve uzunluğu dört olan listeleri saymamız istenmektedir. Bunun için şöyle bir yol izleyebiliriz: Bu örneğin (a) şıkkı gereğince tekrar kullanıma izin verilen $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$ tane liste vardır. Açıkçası, bu sayı sorumuzun cevabı değildir çünkü bu listelerin bir çoğu E harfini içermez. Buna göre E **içermeyen** liste sayısını 2401'den çıkarmamız gerekir. E içermeyen bir liste hazırlarken her girdi için altı seçenek vardır (çünkü A,B,C,D,F veya G harflerinden herhangi biri seçilebilir). Böylelikle E içermeyen $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ liste vardır. Bu nedenle, sorumuzun cevabı olarak, en az bir E içeren ve tekrar kullanıma izin verilen $2401 - 1296 =$ **1105** tane liste vardır.

Başka bir örneğe geçmeden önce önemli bir noktaya değinelim. Muhtemelen (d) şıkkının (c)'ye benzer bir şekilde çözülüp çözülemeyeceğini merak etmişsinizdir. Şimdi bunu o şekilde yapmayı deneyelim. En az bir E içeren ve tekrar kullanıma izin verilen 4 uzunluklu listeleri saymak istiyoruz. Aşağıdaki şema (c)'den uyarlanmıştır. Aradaki tek fark şudur: Yedi harften her biri tekrar kullanılabilir. Bu nedenle her kutu için yedi seçenek vardır.

Tür 1: $(\boxed{E}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}})$

Tür 2: $(\underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \boxed{E}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}})$

Tür 3: $(\underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \boxed{E}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}})$

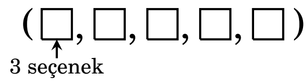
Tür 4: $(\underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \underbrace{\square}_{7\text{ seçenek}}, \boxed{E})$

Toplam olarak $7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 = 1372$ tane liste vardır. Bu sayı, (d) şıkkında bulduğumuz 1105 (doğru) cavabından büyüktür. Burada neyin yanlış gittiğini görmek zor değildir. Örneğin (E,E,A,B) listesi *hem* birinci *hem de* ikinci türde bir listedir. Bu nedenle *iki* defa sayılmıştır. Benzer şekilde (E,E,C,E) hem birinci hem ikinci hem de üçüncü türdedir. Yani üç defa sayılmıştır. Aslında bir defadan fazla sayılan çok sayıda liste bulabilirsiniz. Sayma problemlerini çözerken, bu tür çift sayma veya üç defa sayma ya da daha kötüsünden kaçınmak için daima dikkatli olmamız gerekir.

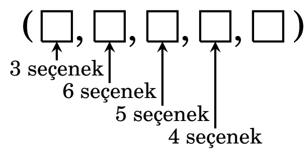
Bir sonraki bölümde (c) ve (d) şıklarında kullandığımız yöntemleri sistematik bir şekilde ifade eden iki sayma ilkesi daha vereceğiz. Bu ilkeleri çarpma ilkesiyle beraber kullanarak sayma problemlerindeki çift sayma hatalarından kaçınabiliriz. Fakat öncesinde, çarpma ilkesine bir örnek daha verelim. Bu örnek, düşebileceğimiz başka bir hataya dikkat çeker.

Örnek 3.4 A, B, C, D, E, F, G harflerinden uzunluğu 5 olan tekrarsız bir liste yapılmak isteniyor. İlk girdisi B, C veya D; son girdisi ise sesli bir harf olan kaç liste yapılabilir?

Çözüm: Beş kutudan oluşan bir liste yaparak işe başlayalım. İlk kutu B, C veya D harflerini içerebilir. Bu yüzden bu kutu için üç seçenek vardır.

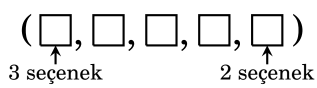


Geri kalan 4 kutu için 6 harf kalır. Bu kutuları, çok fazla düşünmeden, her defasında yeni bir harf kullanarak birer birer dolduralım.

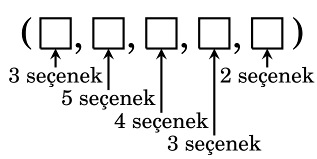


Son kutuya geldiğimizde ortaya bir sorun çıkar. Bu kutu sesli bir harf içermelidir fakat bildiğimiz tek şey bunların birini ya da her ikisini önceki kutularda kullanmış olabileceğimizdir. Son kutu için yapılabilecek seçim sayısını bilmediğimizden dolayı çarpma ilkesi kullanılmaz hâle gelmiştir.

Bu problemi çözmenin doğru yolu, öncelikle (kısıtlamalara tâbi olan) ilk ve son kutuları doldurmaktır.



Daha sonra, geri kalan ortadaki kutuları elde kalan 5 harfle doldurabiliriz.



Çarpma ilkesi gereğince, istenilen türde $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{360}$ tane liste vardır.

Bir sonraki bölümde verilecek olan yeni ilkeler genellikle çarpma ilkesiyle beraber kullanılır. Bu nedenle, bilgilerinizi sınamak için birkaç alıştırma üzerinde çalışabilirsiniz.

Bölüm 3.2 Alıştırmaları

1. Tekrar kullanıma izin verilmek koşuluyla *T, H, E, O, R, Y* harflerinden yapılmış olan listeleri düşünelim.

- **(a)** Uzunluğu 4 olan kaç liste vardır?
- **(b)** Uzunluğu 4 olan ve T ile başlayan kaç liste vardır?
- **(c)** Uzunluğu 4 olan ve T ile başlamayan kaç liste vardır?

2. Havaalanları 3 harfli kodlarla temsil edilir. Örneğin Virginia Richmond havaalanı *RIC* koduna, Tennessee Memphis havaalanı ise *MEM* koduna sahiptir. Kaç tane 3 harfli kod üretilebilir?

3. *A, B, C, D, E, F* harflerinden uzunluğu 3 olan listeler yapılmak isteniyor.

- **(a)** Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmek koşulu ile ...
- **(b)** Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmemek koşulu ile ...
- **(c)** Sembollerin tekrar kullanımına izin verilen ve A harfini içeren ...
- **(d)** Sembollerin tekrar kullanımına izin verilen ve A harfini içermeyen ...

kaç tane liste yapılabilir?

4. Bir kahve sipariş ederken, normal veya kafeinsiz; küçük, orta veya büyük boy; cam veya karton bardak seçenekleri var olsun. Buna göre bir kahve kaç farklı şekilde sipariş edilebilir?

5. Bu problem, 10011011 veya 00001010 örneklerinde olduğu gibi 8 basamaklı ikili dizeler (yani 0 ile 1 rakamlarından oluşan 8 basamaklı sayılar) hakkındadır.

- **(a)** Bu şekilde kaç tane dize vardır?
- **(b)** Bu dizelerin kaç tanesi 0 ile biter?
- **(c)** İkinci ve dördüncü rakamı 1 olan kaç dize vardır?
- **(d)** İkinci **veya** dördüncü rakamı 1 olan kaç dize vardır?

6. İlk önce bir madeni para, sonra bir zar atılsın ve sonra da 52 kartlık bir deste iskambil kağıdından bir kart çekilsin. Bu deney kaç farklı şekilde sonuçlanabilir? Gelen zarın ⚂ olduğu kaç sonuç vardır? Gelen zarın tek sayı olduğu kaç sonuç vardır? Gelen zarın tek sayı ve çekilen kartın papaz olduğu kaç sonuç vardır?

7. Bu problem $A, B, C, D, \ldots, Z$ harflerinden oluşturulan 4 harfli kodlarla ilgilidir.

- **(a)** Bu şekilde kaç tane kod oluşturulabilir?
- **(b)** Bu kodların kaç tanesinde aynı iki harf yan yana gelmez?

8. Bir madeni para 10 kez art arda atılıyor. Yazı ve turaların olası kaç dizesi vardır?

9. Yeni bir araba; beş farklı renk, üç farklı motor büyüklüğü ve iki farklı vites seçeneği ile gelmektedir. Buna göre kaç tane farklı kombinasyon oluşturulabilir?

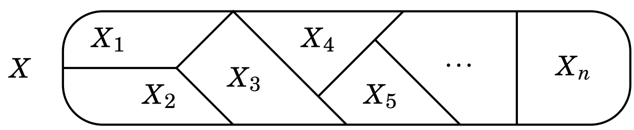
10. Bir zar arka arkaya dört kez atılıyor. Örneğin, ⚁⚅⚅⚂ veya ⚂⚂⚂⚂ olası sonuçlardan iki tanesidir. Buna göre kaç farklı sonuç mümkündür?

3.3 Toplama ve Çıkarma İlkeleri

Şimdi iki tane daha sayma ilkesi verelim: toplama ve çıkarma ilkeleri. Aslında bu ilkeler *tamamıyla* yeni değildir çünkü onları yıllarca sezgisel olarak kullandınız. Burada, bu iki temel düşünce modelini isimlendirip onları kümeler dilinde ifade edeceğiz. Bu işi yapmak; onları ne zaman kullandığımızı fark etmemize ve daha da önemlisi, kullanılabilecekleri yeni durumları görmemize yardımcı olacaktır.

Eğer bir küme parçalara bölünebilirse *toplama ilkesi* o kümenin eleman sayısının, parçaların eleman sayıları toplamına eşit olduğunu belirtir.

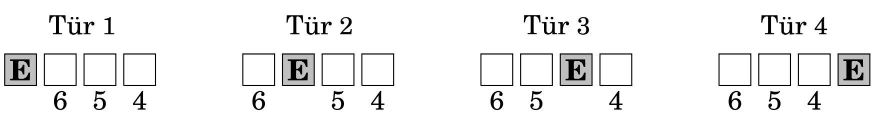
Gözlem 3.2 (Toplama İlkesi)
Sonlu bir X kümesi $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ şeklide yazılsın. Eğer $i \neq j$ iken $X_i \cap X_j = \emptyset$ ise $|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ olur.



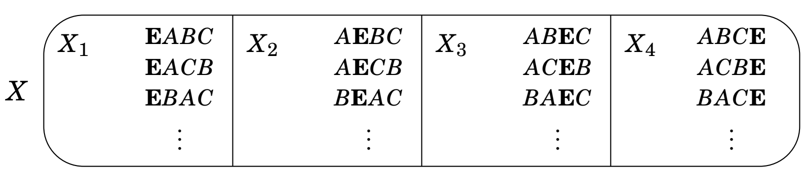
İlk olarak, toplama ilkesine atıf yapmadan onu doğal bir şekilde kullandığımız Örnek 3.3 (c)'yi tekrar ele alalım.

Örnek 3.5 E harfini içermek koşuluyla A, B, C, D, E, F, G harflerinden oluşturulan ve uzunluğu 4 olan kaç tekrarsız liste yapılabilir?

Çözüm: Örnek 3.3 (c)'de bu listeleri dört türe ayırdık. Bu işi; E harfinin birinci, ikinci, üçüncü veya dördüncü sırada olmasına bağlı olarak yaptık.



Daha sonra, birinci türdeki listeleri saymak için çarpma ilkesini kullandık. İkinci girdi için 6, üçüncü girdi için 5 ve dördüncü girdi için ise 4 seçenek vardır. Bu seçenekler, yukarıda ait oldukları sıradaki kutuların altına yazılmıştır. Çarpma ilkesi, birinci türde $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ tane liste olduğunu gösterir. Benzer şekilde ikinci, üçüncü ve dördüncü türde $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$'şer tane liste vardır.



Sonrasında; saymak istediğimiz kümeyi sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türdeki listelerden oluşan X_1, X_2, X_3 ve X_4 parçalarına ayrılmış bir X kümesi olarak düşündük ve toplama ilkesini sezgisel olarak uyguladık.

Toplama ilkesi, $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| = 120 + 120 + 120 + 120 = \mathbf{480}$ tane listenin E harfi içerdiğini söyler.

Toplama ilkesi belirli kümelerin elemanlarını saymak için kullanılır. Her bir X_i kümesinin X kümesininden daha kolay sayılabildiği durumlarda, X kümesini $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ şeklinde parçalayabilirsek toplama ilkesi bize $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + \cdots + |X_n|$ olduğunu söyler.

Ancak Gözlem 3.2'de belirtildiği gibi bu ilkenin uygulanabilmesi için herhangi iki X_i kümesinin kesişiminin $\emptyset$ olması gerekir. Örneğin, X_1 ve X_2 kümelerinin ortak bir elemanı varsa bu eleman hem $|X_1|$ hem de $|X_2|$'de sayılacağı için $|X| < |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ olur. (Bu durum, Örnek 3.3'ün sonunda bahsedilen çift sayma sorunudur.)

Örnek 3.6 Beş basamaklı **çift** sayılardan kaçı sadece bir tane 6 rakamı içerir fakat hiç 0 rakamı içermez? Örneğin, 55634 ve 16118 sayıları belirtilen türdedir. Ancak (0 içeren) 63304, (birden fazla 6 içeren) 63364 ve (çift olmayan) 55637 sayıları belirtilen türde değildir.

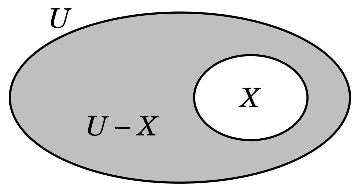
Çözüm: Bu türdeki sayıların kümesi X olsun. Amacımız, sorunun cevabı olan $|X|$ sayısını bulmaktır. Aşağıda gösterildiği gibi $i-$yinci rakamı 6 olan sayıların kümesine X_i diyelim. Buna göre $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$ yazılabilir. Dikkat edilirse $i \neq j$ iken X_i ve X_j kümelerinin içerdikleri 6 rakamı farklı sıralarda olduğu için $X_i \cap X_j = \emptyset$ olur. Şimdi, çarpma ilkesini kullanarak her bir $|X_i|$ sayısını hesaplayalım ve sonra da toplama ilkesini uygulayalım.

X_1	**6**	8	8	8	3
X_2	8	**6**	8	8	3
X_3	8	8	**6**	8	3
X_4	8	8	8	**6**	3
X_5	8	8	8	8	**6**

X_1 kümesindeki her sayı 6 ile başlar. Bunu takip eden üç hane, (izin verilmeyen) 0 veya (zaten kullanılmış olan) 6 dışındaki rakamlardan oluşur. Bahsi geçen bu üç haneden her biri için sekizer seçenek vardır. X_1 kümesi çift sayılardan oluştuğu için son rakam sadece 2, 4 veya 8 olabilir. Yani son rakam için sadece üç seçenek vardır. Çarpma ilkesi, $|X_1| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 = 1536$ olduğunu söyler. Benzer şekilde $|X_2| = |X_3| = |X_4| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 = 1536$ bulunur.

Dikkat edilirse X_5 biraz farklıdır çünkü son rakamı daima 6 olmak zorundadır. Buna göre çarpma ilkesinden $|X_5| = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$ bulunur.

Şimdi toplama ilkesini kullanalım: Hiç 0 içermeyen ve bir tane 6 içeren $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| + |X_5| = 1536 + 1536 + 1536 + 1536 + 4096 = \mathbf{10.240}$ adet beş basamaklı çift sayı vardır.



Şimdi sıra bir sonraki sayma yöntemine geldi: *çıkarma ilkesi*. Sağ tarafta olduğu gibi işe X kümesini U evrensel kümesinin bir altkümesi kabul ederek başlayalım. Burada $\overline{X} = U - X$ tümleyen kümesi taranmıştır. Bu taralı bölgedeki nesneleri saymak istediğimizi varsayalım. Dikkat edileceği üzere bu sayı, U kümesindeki nesnelerin sayısının X kümesindeki nesnelerin sayısından farkıdır. Yani $|U - X| = |U| - |X|$ olur. Çıkarma ilkesi tam da budur.

Gözlem 3.3 (Çıkarma İlkesi)
Eğer X kümesi, sonlu bir U kümesinin altkümesi ise $|\overline{X}| = |U| - |X|$ olur. Bir başka deyişle, eğer $X \subseteq U$ ise $|U - X| = |U| - |X|$ olur.

Belirli bir U kümesini; bazı elemanlarını *dahil etmeden* saymak, onları *dahil edip* saymaktan daha kolay ise çıkarma ilkesi kullanılır. Aslında bu düşünce biçimini daha önce gördük. Örnek 3.3'ün (d) şıkkında, bu ilkeye atıf yapmadan onu doğal bir biçimde kullandık. Bunu açıkça görmek için aynı örneği çıkarma ilkesi dilini kullanarak tekrar çözelim.

Örnek 3.7 *A, B, C, D, E, F, G* sembollerinden oluşan ve uzunluğu 4 olan tekrarlı listelerin kaç tanesi en az bir adet E harfi içerir?

Çözüm: Böyle bir liste; bir, iki, üç veya dört tane E harfi içerebilir. Bu harfler çeşitili sıralarda olabileceği için durum oldukça karmaşıktır.

Şimdi E içerip içermediğine bakmaksızın A, B, C, D, E, F, G harflerinden oluşan ve uzunluğu 4 olan listelerin kümesine U diyelim. Bu kümeyi saymak oldukça kolaydır. Çarpma ilkesi, $|U| = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ olduğunu söyler.

Hiç *E içermeyen* listelerin kümesine X dersek bu kümeyi saymak da aynı derecede kolaydır. Çarpma ilkesi $|X| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ olduğunu söyler.

Dikkat edilirse en az bir tane E içeren listelerin kümesi $U - X$ kümesidir. Çıkarma ilkesine göre $|U - X| = |U| - |X| = 2401 - 1296 = \mathbf{1105}$ olur.

Nesneleri saymaya devam ettiğimiz sürece; çarpma, toplama ve çıkarma ilkelerini kullanmak için birçok fırsatımız olacak. Genel olarak bu ilkeler, henüz daha incelemediğimiz diğer sayma ilkelerinin içinde ortaya çıkar. Bu nedenle, diğer bölüme geçmeden önce bazı alıştırmaları çözerek mevcut bilgileri pekiştirmek önemlidir.

Bölüm 3.3 Alıştırmaları

1. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. En az bir tane kırmızı renkte kart içeren kaç sıralama yapılabilir? Tüm kartların siyah ya da tüm kartların kupa olduğu kaç sıralama yapılabilir?
2. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş kartın hepsinin de aynı türden olduğu kaç sıralama vardır?
3. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş kartın hepsinin de aynı renkten (yani hepsinin siyah veya hepsinin kırmızı) olduğu kaç sıralama yapılabilir?
4. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş karttan sadece bir tanesinin kız olduğu kaç sıralama yapılabilir?
5. Rakamları tekrar etmeyen ve 1 ile 9999 arasında olan kaç tane tamsayı vardır? En az bir rakamı tekrar eden kaç tane tamsayı vardır?
6. *A, B, C, D, E* harflerinden oluşturulan tekrarlı listeleri düşünelim.
   (a) Uzunluğu 5 olan ve en az bir harfi tekrar eden kaç liste vardır?
   (b) Uzunluğu 6 olan ve en az bir harfi tekrar eden kaç liste vardır?
7. Belirli bir web sitesi şifresinin, İngiliz alfabesindeki beş harften oluşması ve en az bir büyük harf içermesi gerekmektedir. Kaç farklı şifre oluşturulabilir? Büyük ve küçük harflerin karıştırılması gerekirse ne olur?
8. Bu problem *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J* harflerinden yapılan listelerle ilgilidir.
   (a) Beş karakterden oluşan, sesli bir harfle başlayan ve tekrar kullanıma izin verilmeyen kaç liste yapılabilir?
   (b) Beş karakterden oluşan, sesli bir harfle başlayıp sesli bir harfle biten ve tekrar kullanıma izin verilmeyen kaç liste yapılabilir?
   (c) Beş karakterden oluşan, sadece bir tane *A* harfi içeren ve tekrar kullanıma izin verilmeyen kaç liste yapılabilir?
9. *A, B, C, D, E, F, G, H* harflerinden yapılan ve uzunluğu 6 olan listeleri ele alalım. İki tane sesli harf yan yana gelecek şekilde kaç tekrarsız liste oluşturulabilir?
10. Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmek koşuluyla *P, R, O, F, S* harflerinden oluşturulan ve uzunluğu altı olan listeleri göz önüne alalım. (Örneğin, (*P,R,O,O,F,S*) bu listelerden biridir.) Buna göre *S* ile biten ve birden fazla *O* içeren kaç liste yapılabilir?
11. 1 ile 1000 arasındaki tamsayılardan kaç tanesi 5 ile tam bölünür? Kaç tanesi 5 ile tam bölünmez?
12. Bir kitaplık rafında altı tane matematik kitabı, dört tane fizik kitabı ve üç tane de kimya kitabı bulunmaktadır. Aynı alandaki kitaplar yan yana gelecek şekilde kaç farklı düzenleme yapılabilir?

3.4 Faktoriyel ve Permütasyon

Önceki iki bölümün örneklerinde, n tane sembolden oluşan ve uzunluğu n olan tekrarsız listelerin sıklıkla sayılması gerektiği dikkatinizi çekmiş olabilir. Çok sık karşılaşılan bu problemin üstesinden gelmek için *faktoriyel* kavramı kullanılır.

Aşağıdaki tablo bu kavramı açıklar. İlk sütun, 0 ile başlar ve n tamsayısının ardışık değerlerini listeler. İkinci sütün, n tane sembol içeren $\{a, b, \ldots\}$ kümesini belirtir. Üçüncü sütun, bu sembollerden oluşturulan ve uzunluğu n olan bütün tekrarsız listeleri içerir. Son sütun, bu türdeki listelerin sayısını sayar. Dikkat edilirse $n = 0$ olduğunda, uzunluğu 0 olan ve 0 tane sembolden oluşan sadece bir tane liste vardır; o da () ile gösterilen boş listedir. Bu nedenle o satırın son sütununa 1 yazılmıştır.

n	Semboller	Uzunluğu n olan tekrarsız listeler	$n!$
0	$\{\}$	()	1
1	$\{a\}$	a	1
2	$\{a,b\}$	$ab,\quad ba$	2
3	$\{a,b,c\}$	$abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba$	6
4	$\{a,b,c,d\}$	$abcd,\ acbd,\ bacd,\ bcad,\ cabd,\ cbad,$ $abdc,\ acdb,\ badc,\ bcda,\ cadb,\ cbda,$ $adbc,\ adcb,\ bdac,\ bdca,\ cdab,\ cdba,$ $dabc,\ dacb,\ dbac,\ dbca,\ dcab,\ dcba,$	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Her $n > 0$ için son sütunda bulunan sayılar çarpma ilkesi kullanılarak hesaplanabilir: n tane sembolden oluşan ve uzunluğu n olan tekrarsız liste sayısı $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$'dir. Örneğin, $n = 4$ için verilen satırın son sütunundaki sayı $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$'dür.

Yukarıdaki tablonun $n-$yinci satırının son sütununda bulunanan sayıya n **faktoriyel** denir. Bu sayı $n!$ sembolü ile gösterilir ve "*n faktoriyel*" diye okunur. Şimdi bunun tanımını yapalım:

Tanım 3.1 Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise $n!$ ifadesi, uzunluğu n olan ve n tane sembolden oluşturulan tekrarsız liste sayısıdır. Böylelikle $0! = 1$ ve $1! = 1$ olur. Eğer $n > 1$ ise $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ ile verilir.

Yukarıdaki tanıma göre
$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 2\cdot 1 = 2\\
3! &= 3\cdot 2\cdot 1 = 6\\
4! &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24\\
5! &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120\\
6! &= 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720, \quad \text{vb. olur.}
\end{aligned}$$

Öğrenciler genelde $0! = 0$ olduğunu zanneder ama bu yanlıştır. Yukarıda belirttiği üzere bunun doğrusu $0! = 1$ şeklindedir. İşte $0! = 1$ olduğunu görmenin başka bir yolu: Dikkat edilirse $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) = 5\cdot 4!$ olur. Benzer şekilde $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\cdot(3\cdot 2\cdot 1) = 4\cdot 3!$ yazabiliriz. Genellersek

$$n! = n\cdot(n-1)! \tag{3.1}$$

formülünü elde ederiz. Bu denklem, $n = 1$ için $1! = 1\cdot(1-1)!$ yani $1! = 1\cdot 0!$ sonucunu verir. Eğer yanlışlıkla $0! = 0$ olduğunu düşünürsek $1! = 0$ sonucunu elde ederiz ki bu yanlıştır.

Örnek 3.8 Bu problem *a, b, c, d, e, f* ve *g* harflerinden oluşturulan ve uzunluğu yedi olan listelerle ilgilidir.

(a) Tekrar kullanıma izin verilmeyen kaç liste vardır?
(b) Tekrar kullanıma izin verilmeyen *ve* ilk iki girdisi sesli harflerden oluşan kaç liste vardır?
(c) Sembollerin tekrar kullanıma izin verilen ve en az bir sembolü tekrar eden kaç liste vardır?

İlk önce birinci soruya cevap verelim. Dikkat edileceği üzere yedi tane harf vardır. Buna göre listelerin toplam sayısı $7! =$ **5040** olur. Şimdi ikinci soruyu cevaplayalım. Dikkat edilirse $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesi iki tane sesli, üç tane sessiz harf içerir. Listelerin ilk iki girdisi sesli harflerden, son beş girdisi ise sessiz harflerden oluşmalıdır. Çarpma ilkesine göre bu türdeki listelerin sayısı $2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2!5! =$ **240** olarak bulunur.

Üçüncü soruyu cevaplamak için çıkarma ilkesini kullanabiliriz. Tekrar kullanıma izin verilerek *a, b, c, d, e, f, g* harflerinden oluşturulan listelerin kümesi U olsun. Çarpma ilkesine göre $|U| = 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^7 = 823.543$ olur. Dikkat edilirse U kümesi (a,g,f,b,d,c,e) gibi tekrarsız listelerin yanı sıra (f,g,b,g,a,a,a) gibi girdileri tekrar eden listeleri de içerir. Ancak biz, en az bir girdisi tekrar eden listelerin sayısını hesaplamak istiyoruz. Bunun için tekrarsız listeleri U kümesinden çıkarabiliriz. Tekrarsız listelerin kümesi $X \subseteq U$ olsun. Buna göre $|X| = 7!$ olur. Böylelikle sorduğumuz soruya cevap olarak $|U - X| = |U| - |X| = 7^7 - 7! = 823.543 - 5040 =$ **818.503** elde ederiz.

Örnek 3.8 (a)'da $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesindeki yedi elemanla yapılabilecek listeleri saydık ve bunlardan $7! = 5040$ tane olduğunu gördük. Dikkat edilirse *cedagf*, *gfedcba* veya *abcdefg* örneklerinde olduğu gibi bu listeler X kümesindeki elemanların sadece sıraya dizilmesidir. Böyle bir sıralamanın özel bir adı vardır. Buna, X kümesinin bir *permütasyonu* denir.

Bir kümenin **permütasyonu**, o kümenin tüm elemanlarından oluşan sıralı bir dizedir. Yani kümenin her elemanını içeren tekrarsız bir listedir. Örneğin $X = \{1,2,3\}$ kümesinin altı tane permütasyonu vardır. Bunlar:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Bu kümenin altı tane farklı permütasyona sahip olması, X kümesindeki üç sembolden yapılabilecek tekrarsız liste sayısının $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olduğunu belirten Tanım 3.1'den de görülebilir.

Üç tane kitabı 1, 2 ve 3 sayılarıyla temsil edelim. Önceki paragraf, bu kitapların altı farklı şekilde rafa dizilebileceğini gösterir.

Bir iskambil kağıdı destesinden dört tane kızı çekip sıralayalım. Çarpma ilkesi gereğince bunu $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ farklı yolla yapabiliriz. Bu nedenle dört kızdan oluşan bir kümenin 24 tane permütasyonu vardır.

Q♣ Q♡ Q♠ Q♢	Q♣ Q♡ Q♢ Q♠	Q♣ Q♠ Q♡ Q♢	Q♣ Q♠ Q♢ Q♡	Q♣ Q♢ Q♡ Q♠	Q♣ Q♢ Q♠ Q♡
Q♡ Q♣ Q♠ Q♢	Q♡ Q♣ Q♢ Q♠	Q♡ Q♠ Q♣ Q♢	Q♡ Q♠ Q♢ Q♣	Q♡ Q♢ Q♣ Q♠	Q♡ Q♢ Q♠ Q♣
Q♠ Q♡ Q♣ Q♢	Q♠ Q♡ Q♢ Q♣	Q♠ Q♣ Q♡ Q♢	Q♠ Q♣ Q♢ Q♡	Q♠ Q♢ Q♡ Q♣	Q♠ Q♢ Q♣ Q♡
Q♢ Q♡ Q♠ Q♣	Q♢ Q♡ Q♣ Q♠	Q♢ Q♣ Q♡ Q♠	Q♢ Q♣ Q♠ Q♡	Q♢ Q♠ Q♣ Q♡	Q♢ Q♠ Q♡ Q♣

Genellersek, n tane elemanı olan bir kümenin $n!$ tane permütasyonu vardır. Yukarıda $\{1,2,3\}$ kümesinin $3! = 6$ tane permütasyonu, {Q♢, Q♠, Q♡, Q♣} kümesinin ise $4! = 24$ tane permütasyonu olduğunu gördük. Dikkat edilirse $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ kümesinin $7! = 5040$ tane permütasyonu vardır ama bunların hepsini listelemenin pek anlamı yoktur. Önemli olan nokta, faktoriyel kavramının permütasyon sayısını saymasıdır.

Bir kümenin permütasyonu, o küme elemanlarının sıralı bir *dizesidir* derken gayriresmî bir ifade kullanırız çünkü elemanlar gerçek manada sıraya dizilmemiş olabilir. Örneğin, her biri beş masalık dört sıradan oluşan 20 masalık bir sınıf düşünelim. X kümesi 20 öğrenciden oluşan bir sınıf olsun. Öğrenciler içeri girsin ve her masaya bir kişi oturursun. Bu olayı 20 öğrencinin bir permütasyonu olarak görebiliriz çünkü masaları 1'den 20'ye kadar numaralandırırsak öğrenciler uzunluğu 20 olan bir listeye yerleşir. Bu şekilde $20! = 2.432.902.008.176.640.000$ tane permütasyon vardır.

Şimdi, permütasyon kavramının farklı bir türüne bakalım. Bir X kümesinden $k \leq |X|$ tane eleman seçelim ve *bunları* sıraya dizelim. Elde ettiğimiz dizeye X kümesinin k elemanlı bir permütasyonu denir. Özet olarak X kümesinin bir **permütasyonu**, tüm elemanlarından oluşan tekrarsız bir listedir. X kümesinin **k'lı permütasyonu** ise, k tane elemanından oluşan tekrarsız bir listedir.

Örneğin $X = \{a, b, c, d\}$ olsun. X kümesinin 1'li permütasyonları, sadece bir elemandan oluşan listelerdir. Bu şekilde 4 tane liste vardır:

$$a \quad b \quad c \quad d.$$

X kümesinin 2'li permütasyonları, bu kümenin iki elemanından oluşturulan tekrarsız listelerdir. Bunlardan 12 tane vardır:

$$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc.$$

Bunların hepsini yazmadan da toplam sayılarının 12 olduğunu söyleyebilirdik çünkü X kümesinin elemanlarıyla uzunluğu iki olan tekrarsız bir liste yaparken ilk girdi için 4, ikinci girdi için 3 seçenek vardır. Çarpma ilkesi gereğince X kümesinin 2'li permütasyonlarının toplam sayısı $4 \cdot 3 = 12$ olur.

Şimdi X kümesinin 3'lü permütasyonlarını sayalım. Bunlar, X kümesinin elemanlarıyla yapılan ve uzunluğu üç olan tekrarsız listelerdir. Çarpma ilkesi, bunlardan $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ tane olduğunu söyler. Bunlar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{cccccc} abc & acb & bac & bca & cab & cba \\ abd & adb & bad & bda & dab & dba \\ acd & adc & cad & cda & dac & dca \\ bcd & bdc & cbd & cdb & dbc & dcb \end{array}$$

X kümesinin 4'lü permütasyonları, dört elemandan yapılan tekrarsız listelerdir. Bu permütasyonlardan $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tane vardır.

Son olarak geriye dönüp X kümesinin *0'lı permütasyonlarını* düşünelim. Bunlar, X kümesinin elemanlarından yapılan ve uzunluğu 0 olan tekrarsız listelerdir. Kuşkusuz ki bu şekilde sadece bir liste vardır; o da $()$ boş listesidir.

Şimdi yeni bir notasyon verelim: n elemanlı bir kümenin k'lı permütasyonlarının sayısını $P(n, k)$ ile gösterelim. Buna göre yukarıdaki X kümesi için $P(4,0) = 1$, $P(4,1) = 4$, $P(4,2) = 12$, $P(4,3) = 24$, ve $P(4,4) = 24$ olur.

$P(4,5)$ hakkında ne söylenebilir? Bu sayı, 4 elemanlı bir kümenin 5'li permütasyonlarının sayısıdır. Yani 4 sembolden yapılan ve uzunluğu 5 olan tekrarsız listelerin sayısıdır. Böyle bir liste olamayacağı için $P(4,5) = 0$ olur.

Eğer $n > 0$ ise $P(n,k)$ sayısını çapma ilkesiyle bulabiliriz: n tane sembolden, uzunluğu k olan tekrarsız bir liste yaparken ilk girdi için n, ikinci girdi için $n-1$, üçüncü girdi için $n-2$ ve dördüncü girdi için $n-3$ seçenek vardır.

1.	2.	3.	4.	5.	$\cdots$	k.
					$\cdots$	
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
n	$(n-1)$	$(n-2)$	$(n-3)$	$(n-4)$	$\cdots$	$(n-k+1)$

Dikkat edilirse i–yinci sıra için $n-i+1$ seçenek vardır. Örneğin, beşinci sıra için $n-5+1 = n-4$ seçim yapılabilir. Bu şekilde devam edilirse sonuncu (yani k–yıncı) girdi için $n-k+1$ seçenek olduğu görülebilir. Sonuç olarak,

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \tag{3.2}$$

Bu ifadenin toplamda k çarpanı vardır. O hâlde $P(n,k)$ sayısını bulmak için $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots$ ifadesi k tane çarpanı olacak şekilde çarpılır. Örneğin,

$$\begin{array}{rcl}
P(10,1) & = & 10 \;=\; 10 \\
P(10,2) & = & 10\cdot 9 \;=\; 90 \\
P(10,3) & = & 10\cdot 9\cdot 8 \;=\; 720 \\
P(10,4) & = & 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 \;=\; 5040 \\
\vdots & \vdots & \quad\vdots \\
P(10,10) & = & 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \;=\; 3.628.800 \\
P(10,11) & = & 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0 \;=\; 0.
\end{array}$$

Dikkat edilirse on birinci çarpanı 0 olduğu için $P(10,11) = 0$'dır. Bu şaşırtıcı değildir çünkü $P(10,11)$ ifadesi, 10 sembolden oluşan ve uzunluğu 11 olan tekrarsız liste sayısıdır. Böyle bir liste olmadığı için $P(10,11) = 0$ olmalıdır. Aslında Eşitlik 3.2'den her $k > n$ için $P(n,k) = 0$ olduğu görülebilir.

Ayrıca $P(10,10) = 10!$ olduğuna dikkat ediniz. Genellersek $P(n,n) = n!$ olur.

Şimdi, $0 \le k \le n$ için $P(n,k)$ sayısına başka bir formül bulalım. Bunun için faktoriyel tanımını ve Eşitlik 3.2'yi sadeleştirme özelliğiyle kullanalım:

$$\begin{array}{rcl}
P(n,k) & = & n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \\[2ex]
& = & \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \;=\; \dfrac{n!}{(n-k)!}.
\end{array}$$

Örnek olarak $P(8,5)$ sayısını iki şekilde hesaplayalım: Eşitlik 3.2'den $P(8,5) = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$; yukarıdaki formülden $P(8,5) = \dfrac{8!}{(8-5)!} = \dfrac{8!}{3!} = 6720$.

Yukarıda verdiğimiz bilgiler, aşağıdaki gözlem ile özetlenebilir.

Gözlem 3.4 Eleman sayısı n olan bir kümenin ***k*'lı permütasyonu**, o kümenin elemanlarından oluşan ve uzunluğu k olan tekrarsız bir listedir. Bunu, o kümenin k elemanlı bir dizesi olarak düşünebiliriz.

$P(n,k)$ ifadesi, n elemanlı bir kümenin k'lı permütasyonlarının sayısıdır:

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Eğer $0 \le k \le n$ ise $P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ olur.

Dikkat edilirse $P(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ olur. Bu şaşırtıcı değildir çünkü n tane sembolden, uzunluğu 0 olan sadece bir liste yapılabilir; o da boş listedir. Ayrıca $P(0,0) = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ olur. Bu da beklenen bir sonuçtur çünkü 0 sembolden, uzunluğu 0 olan bir tek liste yapılabilir: boş liste.

Örnek 3.9 On tane yarışmacı bir maraton koşusu yapıyor ve hepsi koşuyu bitiriyor. Hiç bir yarışmacı berabere kalmadığına göre birinci, ikinci ve üçüncü gelen yarışmacılar kaç farklı şekilde sıralanabilir.

Çözüm: Yarışmacıları *A, B, C, D, E, F, G, H, I* ve *J* olarak adlandıralım. Koşuyu ilk üçte bitirenler, 10 yarışmacının 3'lü permütasyonu olarak düşünülebilir. Örneğin ECH permütasyonu *E*'nin birinci, *C*'nin ikinci ve *H*'nın üçüncü olması alamına gelir. Buna göre ilk üç için $P(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ farklı sıralama mümkündür.

Örnek 3.10 Beş tane kart, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılarak sıraya dizilsin. Tüm kartlar kırmızı ya da tüm kartlar sinek olacak şekilde kaç farklı sıralama yapılabilir?

Çözüm: Kırmızı kartlardan 26 tane vardır. Bunlardan beş tanesini sıraya dizmenin $P(26,5) = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 =$ 7.893.600 farklı yolu vardır.

Hepsi siyah olan 13 tane sinek vardır. Bunlardan beş tanesini sıraya dizmenin $P(13,5) = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 =$ 154.440 farklı yolu vardır.

Toplama ilkesini kullanarak sorumuza cevap verebiliriz: Hepsi kırmızı ya da hepsi sinek olan $P(26,5)+P(13,5) =$ 8.048.040 tane sıralama yapılabilir.

Dikkat edilirse bu sayfadaki soruları çözmek için $P(n,k)$ notasyonunu kullanmamıza gerek yoktur. Çarpma ve toplama ilkelerini kullanmak yeterlidir. Ancak $P(n,k)$ notasyonu çoğu zaman kullanışlı bir kısaltma sunar.

Bölüm 3.4 Alıştırmaları

1. En küçük hangi n tamsayısı için $n!$ sayısının 10'dan fazla basamağı vardır?
2. Hangi n değerleri için $n!$ sayısının n tane ya da daha az rakamı vardır?
3. Bütün rakamları tek ve birbirinden farklı olan beş basamaklı kaç tane pozitif tamsayı vardır?
4. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $\frac{100!}{95!}$ sayısını bulunuz.
5. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $\frac{120!}{118!}$ sayısını bulunuz.
6. Sonunda iki tane 0 olan $10! = 3.628.800$ sayısı verilsin. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $100!$ sayısının sonunda kaç tane 0 olduğunu belirleyiniz.
7. Rakamlarının tekrar etmemesi ve bütün tek sayıların çift sayılardan önce gelmesi koşuluyla $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ rakamlarından oluşturulan dokuz basamaklı kaç sayı vardır? (Örneğin 137598264 böyle bir sayıdır fakat 123456789 değildir.)
8. Rakamlarının tekrar etmemesi ve bütün tek sayıları ardışık olarak içermesi koşuluyla $1,2,3,4,5,6,7$ rakamlarından oluşturulan yedi basamaklı kaç sayı vardır? (Örneğin 3571264, 2413576, 2467531 vb. olabilir ancak 7234615 **olamaz**.)
9. *A, B, C, D, E, F, G* harflerinin permütasyonlarından kaç tanesi *A, B, C* harflerini alfabetik sırada art arda gelecek şekilde içerir?
10. Rakamları sırasıyla çift-tek olacak şekilde sıralanan ve $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ rakamlarından oluşan kaç tane permütasyon vardır? (Örneğin, 2183470965.)
11. Yedi tane kart, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılarak sıraya diziliyor. Tüm kartların tamamen kırmızı olmadığı kaç sıralama vardır?
12. Yedi tane kart, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılarak sıraya diziliyor. Kartlardan hiçbirinin sinek olmadığı kaç sıralama vardır?
13. İngiliz alfabesinin 26 harfinden, uzunluğu altı olan kaç tekrarsız liste yapılabilir?
14. On kitaptan beş tanesi bir rafa kaç farklı şekilde konulabilir?
15. On beş kişilik bir kulüpte bir başkan, bir başkan yardımcısı, bir sekreter ve bir de sayman seçilecektir. Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?
16. $\{A,B,C,D,E,F\}$ kümesinin 4'lü permütasyonlarının kaç tanesinde A harfinden hemen sonra E harfi gelir?
17. On kişilik bir gruptaki üç kişi, bilet almak için bir bilet gişesine sıraya giriyor. Kaç farklı sıralama mümkündür?
18. **Gama fonksiyonu** adı verilen çok ilginç bir $\Gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ olarak tanımlanır. En dikkat çekici özelliği, her $x \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(x) = (x-1)!$ olmasıdır. Bu özelliği $x = 1,2,3,4$ için doğrulayınız.

    Gama fonksiyonu, faktoriyel kavramını tamsayılar dışındaki sayılar için tanımlamamıza olanak verir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan $n! = \Gamma(n+1)$ yazabiliriz. Dikkat edilirse gama fonksiyonu sadece tamsayılarda değil, $[0,\infty)$ aralığının her noktasında bir değer alır. Böylece her $n \in [0,\infty)$ sayısına karşılık bir $n!$ değeri bulabiliriz. Bonus: $\pi!$ sayısını hesaplayınız.

3.5 Altkümeleri Sayma

Önceki bölümde, n girdi arasından k tanesini seçerek oluşturabileceğimiz listelerin sayısıyla ilgilendik. Şimdi bununla ilgili başka bir soru soralım: n elmanlı bir kümeden k tane eleman seçilerek kaç *altküme* oluşturulabilir?

Bu iki problem arasındaki farkı görmek için $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesini ele alalım. A'dan iki girdi seçerek yapılabilecek tekrarsız listeleri düşünelim. Gözlem 3.4, bu şekilde $P(5,2) = 5 \cdot 4 = 20$ tane liste olduğunu söyler. Bunlar:

$$\begin{array}{cccccccccc} (a,b), & (a,c), & (a,d), & (a,e), & (b,c), & (b,d), & (b,e), & (c,d), & (c,e), & (d,e), \\ (b,a), & (c,a), & (d,a), & (e,a), & (c,b), & (d,b), & (e,b), & (d,c), & (e,c), & (e,d). \end{array}$$

Ancak A kümesinin sadece on tane 2 elemanlı *altkümesi* vardır. Bunlar:

$$\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{a,e\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{b,e\},\ \{c,d\},\ \{c,e\},\ \{d,e\}.$$

Altkümelerden daha fazla liste olmasının nedeni şudur: Bir listedeki girdilerin sırasını değiştirmek yeni bir liste üretir ama bir kümedeki elemanların sırasını değiştirmek o kümeyi değiştirmez. Örneğin $a,b \in A$ ile (a,b) ve (b,a) şeklinde iki tane liste ancak bir tane $\{a,b\}$ altkümesi oluşturabiliriz.

Bu bölüm, listeleri değil altkümeleri saymakla ilgilenir. Yukarıda belirtildiği gibi temel soru şudur: n elemanlı bir kümeden k eleman seçerek kaç tane altküme oluşturulabilir? Bu sorunun cevabına isim veren notasyonlarla başlayalım.

Tanım 3.2 Eğer n ve k iki tamsayı ise n elemanlı bir kümeden k eleman seçilerek oluşturulabilecek altküme sayısı $\binom{n}{k}$ ile gösterilir ve "n'nin k'lı kombinasyonu" diye okunur. (Bazı kitaplar $\binom{n}{k}$ yerine $C(n,k)$ kullanır.)

Bu tanıma bir örnek olarak, 4 elemanı olan $A = \{a,b,c,d\}$ kümesinin k elemanlı tüm altkümelerini listeleyen aşağıdaki tablo verilebilir.

k	$A = \{a,b,c,d\}$ kümesinin k elemanlı altkümeleri	$\binom{4}{k}$
-1		$\binom{4}{-1} = 0$
0	$\emptyset$	$\binom{4}{0} = 1$
1	$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$	$\binom{4}{1} = 4$
2	$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$	$\binom{4}{2} = 6$
3	$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$	$\binom{4}{3} = 4$
4	$\{a,b,c,d\}$	$\binom{4}{4} = 1$
5		$\binom{4}{5} = 0$

Tablonun en soluna k değerleri yazılmıştır. Bunların hemen sağında (eğer varsa) A kümesinin k elemanlı altkümeleri yer alır. Örneğin, $k = 1$ için A kümesinin k elemanlı dört altkümesi vardır: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ ve $\{d\}$. Yani $\binom{4}{1} = 4$'tür. Eğer $k = 2$ ise altı tane k elemanlı altküme olduğu için $\binom{4}{2} = 6$ olur.

Dikkat edilirse $k = 0$ olduğunda A kümesinin kardinalitesi k olan sadece bir tek altkümesi vardır: $\emptyset$ yani boş küme. Bu nedenle $\binom{4}{0} = 1$ olur.

Eğer k negatif ya da $|A|$ değerinden büyük ise A kümesinin k elemanlı hiç altkümesi yoktur. Böyle durumlarda $\binom{4}{k} = 0$ olur. Genellersek, $k < 0$ veya $k > n$ için $\binom{n}{k} = 0$ olur. Özel olarak $n < 0$ olması $\binom{n}{k} = 0$ anlamına gelir.

Yukarıdaki tabloda yer alan altkümeleri yazarak $\binom{4}{k}$ değerlerini hesaplamak zor olmasa da bu metod, n ve k büyük olduğunda, $\binom{n}{k}$ sayısını bulmak için pratik bir yöntem değildir. Bu nedenle bir formüle ihtiyaç duyarız. Bunun için $\binom{5}{3}$ üzerinde dikkatli bir şekilde çalışalım. Burada ortaya çıkan örüntü, $\binom{n}{k}$ ifadesine bir formül bulmak için bize yol gösterecektir.

Şimdi, $\binom{5}{3}$ ifadesi $\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin 3 elemanlı altküme sayısıdır. Bunlar, aşağıdaki tablonun üst satırında verilmiştir. Böylece $\binom{5}{3} = 10$ olur. Her altkümenin altındaki satır, o altkümenin $3! = 6$ permütasyonunu listeler. İlk sütun $\{a,b,c\}$ altkümesinin $3! = 6$ permütasyon listeler. İkici sütun $\{a,b,d\}$ altkümesinin permütasyonlarını listeler ve bu şekilde devam eder.

$\longleftarrow \binom{5}{3} \longrightarrow$

	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,b,e\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,e\}$	$\{a,d,e\}$	$\{b,c,d\}$	$\{b,c,e\}$	$\{b,d,e\}$	$\{c,d,e\}$
$\uparrow$	*abc*	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*	*bcd*	*bce*	*bde*	*cde*
	acb	*adb*	*aeb*	*adc*	*aec*	*aed*	*bdc*	*bec*	*bed*	*ced*
3!	*bac*	*bad*	*bae*	*cad*	*cae*	*dae*	*cbd*	*cbe*	*dbe*	*dce*
	bca	*bda*	*bea*	*cda*	*cea*	*dea*	*cdb*	*ceb*	*deb*	*dec*
	cba	*dba*	*eba*	*dca*	*eca*	*eda*	*dcb*	*ecb*	*edb*	*edc*
$\downarrow$	*cab*	*dab*	*eab*	*dac*	*eac*	*ead*	*dbc*	*ebc*	*ebd*	*ecd*

Bu tablonun ana gövdesi $\binom{5}{3}$ tane sütundan ve 3! tane satırdan oluştuğu için toplam olarak $3!\binom{5}{3}$ tane liste içerir. Bu tablo aynı zamanda $\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin üç elemanlı permütasyonlarından oluşur. Gözlem 3.4, bu şekilde $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!}$ tane permütasyon olduğunu söyler. Böylece tablodaki toplam liste sayısı $3!\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!}$ ile verilir. Bu eşitliğin her iki tarafı 3! ile bölünerek

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

elde edelir. Bu ifadeyi hesaplayarak, değerinin 10 olduğu görülebilir.

Buradaki 5 ve 3 sayılarını özel yapan herhangi birşey yoktur. Yukarıdaki analiz, $\binom{5}{3}$ yerine herhangi bir $\binom{n}{k}$ için de yapabilir. Bu durumda tablonun $\binom{n}{k}$ tane sütunu ve $k!$ tane satırı olacağı için aşağıdaki formül elde edilir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Böylelikle her $k, n \in \mathbb{Z}$ için doğru olan aşağıdaki gözlemi verebiliriz.

Gözlem 3.5 Eğer $0 \le k \le n$ ise $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ olur. Aksi hâlde $\binom{n}{k} = 0$'dır.

Şimdi, öğrendiğimiz bu bilgileri bazı örnekler üzerinde uygulayalım.

Örnek 3.11 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin 4 elemanlı kaç altkümesi vardır?

Çözüm: Bu türde $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{4!5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4!} = \mathbf{126}$ altküme vardır.

Örnek 3.12 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin 5 elemanlı altkümelerinden kaçı iki tane çift sayı içerir?

Çözüm: A kümesinin, iki tane çift sayı içeren 5 elemanlı bir altkümesini oluşturmak iki aşamalı bir işlemdir. İlk önce A kümesindeki dört çift sayıdan iki tanesi $\binom{4}{2} = 6$ yolla seçilir. Daha sonra A kümesindeki beş tek sayıdan üç tanesi $\binom{5}{3} = 10$ yolla seçilir. Çarpma ilkesine göre A kümesinden iki tane çift ve üç tane de tek sayı seçmenin $\binom{4}{2}\binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$ yolu vardır. O hâlde, A kümesinin istenilen özellikte **60** tane altkümesi vardır.

Örnek 3.13 Beş kartlık bir el, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılmaktadır. Kaç tane farklı 5 kartlı el mümkündür?

Çözüm: Desteyi 52 kartlık D kümesi olarak düşünelim. Buna göre 5 kartlı bir el, D kümesinin 5 elemanlı bir altkümesidir. Bu türde birçok altküme vardır. Örneğin

$$\left\{ \boxed{7\clubsuit}, \boxed{2\clubsuit}, \boxed{3\heartsuit}, \boxed{A\spadesuit}, \boxed{5\diamondsuit} \right\}$$

bunlardan biridir. Aslında, 5 kartlı ellerin sayısı D kümesinin 5 elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Bu sayı aşağıda hesaplanmıştır:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = \frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48\cdot47!}{5!\cdot47!} = \frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48}{5!} = 2.598.960$$

Cevap: 52 kartlık bir desteden **2.598.960** tane beş kartlı el dağıtılabilir.

Örnek 3.14 Bu problem, 52 kartlık bir desteden dağıtılabilecek 5 kartlı ellerle ilgilidir. Kartlardan iki tanesi sinek ve üç tanesi kupa olacak şekilde 5 kartlı kaç el vardır?

Çözüm: Bu elleri, aşağıda verildiği gibi uzunluğu iki olan listeler şeklinde düşünelim:

$$\left(\left\{\boxed{\substack{*\\ \clubsuit}}, \boxed{\substack{*\\ \clubsuit}}\right\}, \left\{\boxed{\substack{*\\ \heartsuit}}, \boxed{\substack{*\\ \heartsuit}}, \boxed{\substack{*\\ \heartsuit}}\right\}\right).$$

Bu listenin ilk girdisi, 13 elemanlı sinek kartlarının 2 elemanlı bir altkümesidir. İkinci girdi ise 13 elemanlı kupa kartlarının 3 elemanlı bir altkümesidir. İlk girdi için $\binom{13}{2}$ seçenek, ikinci girdi için $\binom{13}{3}$ seçenek vardır. Çarpma ilkesine göre bu listelerden $\binom{13}{2}\binom{13}{3} = \frac{13!}{2!11!}\frac{13!}{3!10!} = 22.308$ tane vardır. Buna göre bahsedilen türde **22.308** tane 5 kartlı el vardır.

Örnek 3.15 Bir şans oyunu, 1'den 36'ya kadar numaralandırılmış 36 topdan altı tanesi rastgele çekilerek oynanmaktadır. İçerisinde altı tane boş kutu olan $\boxed{\square\square\square\square\square\square}$ şeklindeki bir kuponun fiyatı 1 dolar olmak üzere bu boş kutuları 1 ile 36 arasındaki altı tane farklı sayı ile doldurup, çekilen sayıları sıralama önemli olmaksızın tutturan kişinin 1.000.000$ kazandığını varsayalım. Buna göre kazanma şansınız nedir?

Çözüm: Bir kupon, 36 sayı içeren bir kümeden 6 tane sayı seçilerek doldurulur. Bu şekilde $\binom{36}{6} = \frac{36!}{6!(36-6)!} = 1.947.792$ tane farklı sayı kombinasyonu yazılabilir ve bunlardan sadece biri kazanır. Buna göre **kazanma şansınız 1.947.792'de birdir**.

Örnek 3.16 Basamak sayısı 7 olan (0010100, 1101011 vb.) ikili dizelerden kaç tanesi tek sayıda 1 rakamı içerir?

Çözüm: Tek sayıda 1 içeren yedi basamaklı ikili dizelerin kümesi A olsun. Buna göre sorumuzun cevabı $|A|$ olur. Bu sayıyı bulmak için A kümesini küçük parçalara ayırabiliriz. A kümesindeki herhangi bir dize; bir, üç, beş ya da yedi tane 1 içerir. Sadece bir tane 1 içeren yedi basamaklı dizelerin kümesi A_1, üç tane 1 içeren yedi basamaklı dizelerin kümesi A_3, beş tane 1 içeren yedi basamaklı dizelerin kümesi A_5 ve yedi tane 1 içeren yedi basamaklı dizelerin kümesi A_7 olsun. Buna göre $A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ olur. Herhangi iki A_i kümesinin kesişimi boş küme olduğu için toplama ilkesine göre $|A| = |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7|$ yazılabilir.

Şimdi bu toplamdaki terimleri hesaplayalım. Örneğin A_3 kümesini ele alalım. Bu kümedeki bir dize, 1 rakamı için üç konum seçilip geri kalanlara 0 yazarak oluşturulur. Buna göre $|A_3| = \binom{7}{3}$ olur. Benzer şekilde $|A_1| = \binom{7}{1}$, $|A_5| = \binom{7}{5}$ ve $|A_7| = \binom{7}{7}$ bulunur.

Cevap: $|A| = |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7| = \binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7} = 7 + 35 + 21 + 1 = 64.$ Buna göre tek sayıda 1 içeren **64** tane yedi basamaklı ikili dize vardır.

Bölüm 3.5 Alıştırmaları

1. Bir A kümesinin 37 tane elemanı olsun. A'nın 10 elemanlı kaç altkümesi vardır? Kaç tane altküme 30 elemana sahiptir? Kaç tanesinin 0 tane elemanı vardır?

2. Bir A kümesinin 100 tane elemanı olsun. A kümesinin 5 elemanlı kaç altkümesi vardır? Kaç altkümesinin 10 elemanı vardır? Kaç tanesinin 99 elemanı vardır?

3. 56 tane 3 elemanlı altkümesi olan bir X kümesinin kardinalitesi nedir?

4. Eğer B kümesi $\big|\{X : X \in \mathscr{P}(B), |X| = 6\}\big| = 28$ özelliğine sahip ise $|B|$ kaçtır?

5. Basamak sayısı 16 olan ikili dizelerden kaç tanesi yedi adet 1 içerir? (Örneğin, 0111000011110000 ve 0011001100110010 bu türdeki iki dizedir.)

6. $\big|\{X \in \mathscr{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) : |X| = 4\}\big| =$

7. $\big|\{X \in \mathscr{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) : |X| < 4\}\big| =$

8. Bu problem A,B,C,D,E,F,G,H,I sembollerinden yapılan listelerle ilgilidir.

- **(a)** Alfabetik olarak sıralanmak koşulu ile uzunluğu 5 olan kaç tekrarsız liste yapılabilir. (Örnek: $BDEFI$ veya $ABCGH$ olabilir fakat $BACGH$ olamaz.)
- **(b)** Alfabetik sırada **olmamak** koşulu ile uzunluğu 5 olan kaç tekrarsız liste yapılabilir?

9. Bu problem A,B,C,D,E,F sembollerinden yapılan ve uzunluğu 6 olan tekrarsız listelerle ilgilidir. Bu türdeki listelerin kaçında D harfi A harfinden önce gelir?

10. Bir bölüm, 5 erkek ve 7 kadından oluşmaktadır. Bu bölümden 3 erkek ve 2 kadından oluşan bir komite seçilecektir. Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

11. On basamaklı tamsayılardan kaç tanesi hiç 0 içermez fakat üç tane 6 içerir?

12. Yirmi bir kişi, Kırmızı Takım ve Mavi Takım olarak adlandırılan iki gruba ayrılacaktır. Kırmızı takımda 10 kişi, mavi takımda ise 11 kişi olacaktır. Bu iş kaç farklı şekilde yapılabilir?

13. Kabul edelim ki $n,k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le k \le n$ olsun. Gözlem 3.5'de verilen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formülünü kullanarak $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğunu gösteriniz.

14. Kabul edelim ki $n,k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le k \le n$ olsun. Yalnızca Tanım 3.2'yi kullanarak (Gözlem 3.5'i kullanmadan) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğunu gösteriniz.

15. Tamı tamına dört tane 1 içermeyen on basamaklı kaç ikili dize vardır?

16. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin 6 elemanlı altkümelerinden kaç tanesi tamı tamına üç tane çift sayı içerir? Kaç tanesi üçten farklı miktarda çift sayı içerir?

17. On basamaklı ikili dizlerden kaç tanesi tamı tamına dört veya beş tane 1 içerir? Kaç tanesi dörtten veya beşten faklı miktarda 1 içerir?

18. On basamaklı ikili dizlerin kaç tanesi çift sayıda 1 içerir?

19. Aynı renk ve tür kartlardan oluşan 5 kartlı bir poker eline *floş* denir. Kaç tane farklı floş olabilir?

3.6 Pascal Üçgeni ve Binom Teoremi

Önceki bölümde tanımlanan $\binom{n}{k}$ sayıları arasında zarif ve kayda değer örüntüler vardır. Bu bölümde, $1 \le k \le n$ şartını sağlayan n ve k tamsayıları için

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{3.3}$$

eşitliğine dayanan örüntüleri inceleyeceğiz.

Bu eşitliğin neden doğru olduğuna bakalım. Sol taraftaki $\binom{n+1}{k}$ ifadesi, $n+1$ elemanlı $A = \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin k elemanlı altküme sayısıdır. Bu altkümeler, 0 elemanını ya içerir ya içermez. Sağ taraftaki $\binom{n}{k-1}$ ifadesi, A'nın 0 içeren altkümelerinin sayısıdır. Böyle bir altkümeyi, $\{0\}$ ile başlayıp buna $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinden $k-1$ tane eleman ekleyerek oluşturabiliriz. Bunu yapmanın $\binom{n}{k-1}$ yolu vardır. Yine sağ taraftaki $\binom{n}{k}$ ifadesi, A'nın 0 **içermeyen** altküme sayısıdır. Bu sayı, $\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinden k tane eleman seçme yolu sayısıdır. Tüm bunların ışığında Eşitlik 3.3 bize A'nın k elemanlı alt küme sayısının, 0 içeren k elmanlı altkümeler ile 0 içermeyen k elemanlı altkümelerin sayıları toplamına eşit olduğunu söyler.

Eşitlik 3.3'ün neden doğru olduğunu görmüş olduk. Şimdi, $\binom{n}{k}$ sayılarını üçgensel bir şekilde dizelim. Şekil 3.3'ün sol tarafı, $\binom{n}{k}$ sayılarını bir piramit üzerinde listeler. En tepedeki $\binom{0}{0}$ sayısı, $k=0$ ve $k=1$ değerlerine karşılık gelen $\binom{1}{k}$ sayılarının hemen üzerindedir. *Bunların* altında $k=0,1,2$ değerlerine karşılık gelen $\binom{2}{k}$ sayıları vardır. Örüntü bu şekilde devam eder.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&&& \\
&&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&&& \\
&&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&&& \\
&&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&&& \\
&&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} &&& \\
&& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} && \\
& \binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} && \binom{7}{1} && \binom{7}{2} && \binom{7}{3} && \binom{7}{4} && \binom{7}{5} && \binom{7}{6} && \binom{7}{7} \\
\iddots &&&&&&& \vdots &&&&&&& \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
&&&&&& 1 && 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 2 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 &&& \\
&& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 && \\
& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 & \\
1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 \\
\iddots &&&&&&& \vdots &&&&&&& \ddots
\end{array}$$

Şekil 3.3: Pascal üçgeni

Herhangi bir $0 < k < n$ sayısına karşılık gelen $\binom{n+1}{k}$ sayısı, piramidin bir önceki satırındaki $\binom{n}{k}$ ve $\binom{n}{k-1}$ sayılarının hemen orta alt kısmında bulunur. Eşitlik 3.3 bize $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ olduğunu söyler. Böylece piramitteki (1 hariç) herhangi bir sayı, kendisinin hemen üzerindeki iki sayının toplamıdır.

Bu örüntü, $\binom{n}{k}$ sayılarının hesaplandığı Şekil 3.3'ün sağ tarafında daha belirgindir. Örneğin 21 tamsayısı, üzerindeki 6 ve 15 sayılarının toplamıdır. Benzer şekilde 5 tamsayısı, üst tarafındaki 1 ve 4 tamsayılarının toplamıdır.

Yukarıdaki üçgensel dizi **Pascal üçgeni** olarak adlandırılır. Adını, onun birçok özelliğini ortaya çıkaran Fransız matematikçi ve filozof Blaise Pascal'dan almıştır (1623–1662). Her ne kadar ilk sekiz satırını vermiş olsak da Pascal üçgeni sonsuza dek uzatılabilir. Alt tarafa yeni bir satırı daima ekleyebiliriz. Bunun için o satırın başına ve sonuna 1 yazıp geri kalan sayıları, onların hemen üst kısmındaki sayıları toplayarak bulabiliriz. Bu işlemi, Şekil 3.3'ün sağ tarafında yaparsak aşağıdaki satırı elde ederiz:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1.$$

Bu satır, $0 \le k \le 8$ için, $\binom{8}{k}$ sayılarından oluşur ve biz onları $\binom{8}{k} = \frac{8!}{k!(8-k)!}$ formülünü kullanmadan bulduk! Diğer $\binom{n}{k}$ sayıları da böyle hesaplanabilir.

Pascal üçgeninin (sadece 1 içeren) en tepesindeki satıra *sıfırıncı satır* denir. Onu, hemen altındaki birinci satır, ardından ikinci satır vb. izler. Bu nedenle n−yinci satır, $0 \le k \le n$ için $\binom{n}{k}$ sayılarını listeler. Bölüm 3.5'in 13. ve 14. alıştırmaları, her $0 \le k \le n$ için

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{3.4}$$

olduğunu gösterir. O hâlde, Pascal üçgeninin n−yinci satırında bulunan k−yıncı ve $(n-k)$−yıncı girdiler aynıdır. Bu nedenle Şekil 3.3'den de görüleceği üzere Pascal üçgeni, tepesinden geçen düşey doğruya göre simetriktir.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1x + 1y \\
1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \\
1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5 \\
\iddots \qquad \vdots \qquad \ddots
\end{array}$$

Şekil 3.4: Pascal üçgeninin n−yinci satırı $(x+y)^n$ açılımındaki katsayıları listeler

Dikkat edilirse n−yinci satır, $(x+y)^n$ açılımındaki katsayıların listesine benzemektedir. Örneğin ikinci satır, $(x+y)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xy + \mathbf{1}y^2$ açılımındaki 1 2 1 katsayılarını; üçüncü satır ise $(x+y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3$ açılımındaki

1 3 3 1 katsayılarını listeler. Bkz: Şekil 3.4, n−yinci satırdaki sayıların $(x+y)^n$ açılımındaki katsayılar olduğunu gösterir.

Aslında bu gözlem her n için doğrudur. **Binom teoremi** olarak bilinen bu sonuçtan biraz bahsetmeye değer. Bu teorem, $x+y$ ifadesinin negatif olmayan n−yinci tamsayı kuvvetinin nasıl alınacağını gösterir.

Teorem 3.1 (Binom Teoremi) Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$ olur.

Şimdilik binom teoremini, ispatını vermeden doğru kabul edelim. (Ünite 10'daki alıştırmaların birinde bunu ispatlamanız istenecektir.) Zaman zaman bu teorem yararlı olabilir. Örneğin, $(x+y)^7$ gibi bir ifadeyi açmak gerektiğinide bu teoremi kullanabiliriz. Bunun için Şekil 3.3'deki Pascal üçgeninin yedinci satırına bakıp binom teoremini uygularız:

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.$$

Başka bir örnek daha verelim:

$$\begin{aligned}(2a-b)^4 &= \big((2a)+(-b)\big)^4\\ &= (2a)^4 + 4(2a)^3(-b) + 6(2a)^2(-b)^2 + 4(2a)(-b)^3 + (-b)^4\\ &= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

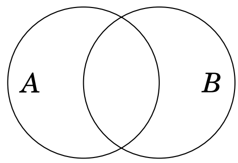
Bölüm 3.6 Alıştırmaları

1. Pascal üçgeninin 11. satırını yazınız.
2. Binom teoreminden $(x+y)^{13}$ açılımındaki x^8y^5 teriminin katsayısını bulunuz.
3. Binom teoreminden $(x+2)^{13}$ açılımındaki x^8 teriminin katsayısını bulunuz.
4. Binom teoreminden $(3x-2y)^9$ açılımındaki x^6y^3 teriminin katsayısını bulunuz.
5. Binom teoremini kullanarak $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ olduğunu gösteriniz.
6. Tanım 3.2 (s. 85) ve Gözlem 1.3'den (s. 13) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ olduğunu gösteriniz.
7. Binom teoremini kullanarak $\sum_{k=0}^{n} 3^k\binom{n}{k} = 4^n$ olduğunu gösteriniz.
8. Gözlem 3.5'i (s. 87) kullanarak Eşitlik 3.3'ü (s. 90) elde ediniz.
9. Binom teoremiyle, $n>0$ için $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$ olduğunu gösteriniz.
10. Eğer $k,n \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le k \le n$ ise $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ olduğunu gösteriniz.
11. Binom teoremini kullanarak $9^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}10^{n-k}$ olduğunu gösteriniz.
12. $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ olduğunu gösteriniz.
13. $\binom{n}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}$ olduğunu gösteriniz.
14. Pascal üçgeninin ilk beş satırı, 11'in kuvvetlerinde ortaya çıkar: $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ ve $11^4 = 14641$. Bunun sebebi nedir? Bu örüntü, 11^5 ile neden devam etmez?

3.7 İçindelik - Dışındalık İlkesi

Birçok sayma problemi, sonlu iki kümenin birleşimi olan $A \cup B$ kümesinin kardinalitesini hesaplamayı içerir. Şimdi bu tür problemleri inceleyelim.

Öncelikle $|A \cup B|$ için bir formül bulalım. İlk bakışta $|A \cup B|$ ve $|A|+|B|$ değerlerinin eşit olduğunu söylemek cazip gelebilir ancak bu pek de doğru değildir. Eğer ilk önce A kümesinin, sonra da B kümesinin elemanlarını sayar ve bunları toplarsak $|A|+|B|$ değerini buluruz. Fakat A ve B kümelerinin ortak elemanları varsa $A \cap B$ kümesindeki her eleman *iki kez* sayılmış olur.



O hâlde $|A|+|B|$ sayısı $|A \cup B|$ sayısından $|A \cap B|$ kadar fazladır. Böylece $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$ olur. Bu eşitlik kullanışlı olabilir.

> **Gözlem 3.6 İçindelik - Dışındalık Formülü**
> Eğer A ve B sonlu iki küme ise $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$ olur.

Genel olarak A, B ve $A \cap B$ kümeleri $A \cup B$ kümesinden daha küçüktür. Bu nedenle Gözlem 3.6, potansiyel olarak, $|A \cup B|$ değerini bulma problemini ondan daha basit olan üç tane sayma problemine indirgeyebilir. Bu formüle *içindelik-dışındalık* formülü denir çünkü $A \cap B$ kümesinde olan elemanlar, $|A|+|B|$ tarafından (iki defa) içerilir ve sonra $|A \cap B|$ çıkartılarak dışarıda bırakılır. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $|A \cup B| = |A|+|B|$ olur. (Bu, toplama ilkesine bir örnektir!) Buna karşılık eğer $|A \cup B| = |A|+|B|$ ise $A \cap B = \emptyset$ olmak zorundadır.

Örnek 3.17 Üç kartlı bir el, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılsın. Üç karttan üçünün de kırmızı olduğu ya da üçününde yüze sahip (yani vale, kız veya papaz) olduğu kaç farklı el vardır?

Çözüm: Kartların hepsinin de kırmızı (yani $\heartsuit$ veya $\diamondsuit$) olduğu tüm üçlü ellerin kümesi A olsun. Benzer şekilde hepsi yüze sahip (yani herhangi bir türdeki J, K veya Q) kartlardan oluşan tüm üçlü ellerin kümesi B olsun. Bu kümeler aşağıda gösterilmiştir.

$$A = \left\{ \left\{ \boxed{5\heartsuit}, \boxed{K\diamondsuit}, \boxed{2\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\heartsuit}, \boxed{J\heartsuit}, \boxed{Q\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{A\diamondsuit}, \boxed{6\diamondsuit}, \boxed{6\heartsuit} \right\}, \ldots \right\} \quad \text{(Kırmızı kartlar)}$$

$$B = \left\{ \left\{ \boxed{K\spadesuit}, \boxed{K\diamondsuit}, \boxed{J\clubsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\heartsuit}, \boxed{J\heartsuit}, \boxed{Q\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{Q\diamondsuit}, \boxed{Q\clubsuit}, \boxed{Q\heartsuit} \right\}, \ldots \right\} \quad \text{(Yüzlü kartlar)}$$

Hepsi kırmızı veya hepsi yüze sahip olan üç kartlı elleri saymak istiyoruz. Bu sayı $|A \cup B|$ ile verilir. Gözlem 3.6 uyarınca $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ olur. Şimdi $|A|$, $|B|$ ve $|A \cap B|$ sayılarını tek tek inceleyelim. A kümesindeki herhangi bir el, destedeki 26 kırmızı karttan üçü seçilerek oluşturulur. Bu nedenle $|A| = \binom{26}{3}$ olur. Benzer şekilde B kümesindeki herhangi bir el, destedeki yüze sahip 12 karttan üçü seçilerek oluşturulur. O hâlde $|B| = \binom{12}{3}$ olur. Şimdi $A \cap B$ kümesini ele alalım. Bu küme, hem kırmızı olup hem de yüze sahip bütün üç kartlı elleri içerir.

$$A \cap B = \left\{ \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{K\,\diamondsuit}, \boxed{J\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{J\,\heartsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{Q\,\diamondsuit}, \boxed{J\,\diamondsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \dots \right\} \qquad \text{(Kırmızı yüzlü kartlar)}$$

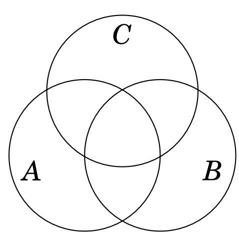
Destede sadece 6 tane kırmızı ve yüzlü kart vardır. Böylece $|A \cap B| = \binom{6}{3}$ olur.

Şimdi sorumuza cevap verebiliriz. Hepsi kırmızı veya hepsi yüze sahip olan $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \binom{26}{3} + \binom{12}{3} - \binom{6}{3} = 2600 + 220 - 20 = \mathbf{2800}$ tane üç kartlı el vardır.

Örnek 3.18 Üç kartlı bir el, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılsın. Üç karttan üçünün de kırmızı **olmadığı** ya da üçününde yüze sahip **olmadığı** kaç farklı el vardır?

Çözüm: Çıkarma ilkesini Örnek 3.17'deki cevapla birleştirip kullanalım. Üç kartlı ellerin toplam sayısı $\binom{52}{3} = \frac{52!}{3!(52-3)!} = \frac{52!}{3!49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!} = 26 \cdot 51 \cdot 17 = 22.100$ tanedir. Cevabı bulmak için bu sayıdan, Örnek 3.17'de bulduğumuz hepsi kırmızı veya hepsi yüze sahip olan üç kartlı ellerin sayısını çıkarmamız gerekir. Buna göre sorumuzun cevabı $22.100 - 2800 =$ **19.300** olur.

Gözlem 3.6'nın üç tane küme içeren bir versiyonu da vardır. Bunun için aşağıdaki diyagramlarla temsil edilen A, B ve C kümelerini ele alalım.



Gözlem 3.6 için kullanılan akıl yürütme ile kendinizi

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \qquad (3.5)$$

olduğuna ikna edebilirsiniz. Şimdilik bunu göz ardı etmenin büyük bir zararı yoktur ancak bu tür şeyler ilginizi çekiyorsa kombinatorik teorisi dersi alabilirsiniz. (Bu konuda hocanızdan bilgi alabilirsiniz!)

Bölüm 3.7 Alıştırmaları

1. Bir üniversitenin matematik veya tarih bölümlerinde (veya her ikisinde) okuyan 523 öğrenci vardır. Matematikte okuyan 100, hem matematik hem de tarihte okuyan 33 öğrenci olduğuna göre tarih bölümünde okuyan öğrenci sayısı kaçtır?

2. Hiçbir rakamı tekrar etmeyen veya rakamlarının hepsi tek sayı olup tekrar edebilen dört basamaklı kaç tane pozitif tamsayı vardır?

3. Çift olan veya 0 rakamını içermeyen dört basamaklı kaç pozitif tamsayı vardır?

4. Bu problem *T, H, E, O, R, Y* harflerinden oluşturulan tekrarlı listelerle ilgilidir.

(**a**) *T* ile başlamayan veya *Y* ile bitmeyen dört harfli kaç liste vardır?

(**b**) Uzunluğu dört olan ve *T,H,E* harflerini verilen sırada art arda içeren kaç liste vardır?

(**c**) Uzunluğu altı olan ve *T,H,E* harflerini verilen sırada art arda içeren kaç liste vardır?

5. Yedi basamaklı ikili dizelerden kaç tanesi 1 ile başlar veya 1 ile biter ya da tamı tamına dört tane 1 içerir?

6. Eğer $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ ise $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$ eşitliği doğru mudur? Açıklayınız.

7. Dört kartlı bir el, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılsın. Bütün kartların aynı türde veya hepsinin kırmızı olduğu kaç el vardır?

8. Dört kartlı bir el, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılsın. Dört karttan her birinin farklı türde veya dört kartın hepsinin de kırmızı olduğu kaç el vardır?

9. *L, I, S, T, E, D* harfleri kullanılarak şu kurala göre 4 harfli bir liste yapılmak isteniyor: Tekrar kullanıma izin verilir; listedeki ilk iki harf seslidir veya liste *D* ile biter. Bu türdeki olası listelerin sayısı kaçtır?

10. Altı basamaklı sayıladan kaç tanesi ya çifttir ya da 5 ile bölünür?

11. Çift olan veya tamı tamına üç adet 0 içeren kaç tane yedi basamaklı sayı vardır?

12. Üç tane 7 ya da iki tane 2 rakamı içeren kaç adet beş basamaklı sayı vardır?

13. Sekiz basamaklı ikili dizelerden kaç tanesi 1 ile biter veya tamı tamına dört tane 1 içerir?

14. Üç kartlı bir el, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılsın. Üç karttan üçünün de kırmızı **olmadığı** ya da üçününde aynı türde **olmadığı** kaç el vardır?

15. On basamaklı ikili dizelerden kaç tanesi ya 1 ile başlar ya da 1 ile biter?

3.8 Çoklu Kümeleri Sayma

Cebinizde dört tane bir kuruş, iki tane beş kuruş, bir tane on kuruş ve iki tane de yirmi beş kuruş olsun. Bozuk paralardan oluşan bu koleksiyonu

$$\{1,1,1,1,5,5,10,25,25\}$$

şeklinde bir küme olarak görmek cazip gelebilir. Ancak bu gösterim geçerli bir model değildir çünkü bir kümenin elemanları tekrar edemez. Bu zorluğun üstesinden gelmek için **çoklu küme** adı verilen bir yapı inşa edelim. Çoklu küme, bir kümeye benzer ancak elemanları tekrar edilebilir. Çoklu kümeleri göstermek için $\{\}$ yerine $[\,]$ kullanılır. Örneğin, cebinizdeki para

$$[\,1,1,1,1,5,5,10,25,25\,]$$

çoklu kümesiyle temsil edilir. Çoklu bir küme, küme ile listenin karışımıdır. Elemanlar tekrar edebilir ama sıralamanın önemi yoktur. Örneğin,

$$\begin{aligned}[1,1,1,1,5,5,10,25,25] &= [25,5,1,1,10,1,1,5,25] \\ &= [25,10,25,1,5,1,5,1,1].\end{aligned}$$

Çoklu bir A kümesinin, tekrarları da içeren eleman sayısına **kardinalitesi** denir ve bu sayı $|A|$ ile gösterilir. Örneğin $A = [1,1,1,1,5,5,10,25,25]$ için $|A| = 9$ olur. Bir elemanın tekrar sayısına o elemanın **katlılığı** denir. Buna göre A kümesindeki 1 elemanının katlılığı 4'tür; 5 ve 25 elemanlarının katlılıkları 2'dir; 10 elemanının katlılığı 1'dir. Her küme, elemanlarının katlılıkları 1 olan çoklu bir küme olarak görülebilir. Bu bağlamda boş küme, hiç elemanı olmayan çoklu küme olarak düşünülebilir: $\emptyset = \{\} = [\,]$.

Çoklu küme kavramını açmak için $\{a,b,c,d\}$ kümesindeki harflerden oluşan ve kardinalitesi 2 olan çoklu kümeleri yazalım:

$$[a,a] \quad [a,b] \quad [a,c] \quad [a,d] \quad [b,b] \quad [b,c] \quad [b,d] \quad [c,c] \quad [c,d] \quad [d,d].$$

Yukarıdaki çoklu kümelerin elemanları alfabetik olarak sıralanmıştır (hatırlanacağı üzere çoklu bir kümenin elemanları keyfi bir şekilde sıralanabilir). Daha sonra 10 adet çoklu küme sözlük sırasına göre dizilmiştir.

Kardinalitesi 3 olan ve $\{a,b,c,d\}$ harflerinden oluşan çoklu kümeleri yazalım:

$$\begin{array}{ccccc} [a,a,a] & [a,a,b] & [a,a,c] & [a,a,d] & [a,b,b] \\ [a,b,c] & [a,b,d] & [a,c,c] & [a,c,d] & [a,d,d] \\ [b,b,b] & [b,b,c] & [b,b,d] & [b,c,c] & [b,c,d] \\ [b,d,d] & [c,c,c] & [c,c,d] & [c,d,d] & [d,d,d]. \end{array}$$

Dikkat edileceği üzere $X = \{a,b,c,d\}$ kümesinin 5 elemanlı hiç *altkümesi* yoktur fakat kardinalitesi 5 olan $[a,a,a,a,a]$, $[a,a,b,c,d]$, $[b,c,c,d,d]$ vb. çok sayıda *çoklu kümesi* vardır. Bunlardan tam olarak kaç tane vardır?

Çoklu kümelerle ilgili ele alacağımız ilk soru budur: Sonlu bir X kümesinden, kardinalitesi k olan kaç tane çoklu küme oluşturulabilir?

Bunun için $X = \{a,b,c,d\}$ kümesindeki harflerden oluşan ve kardinalitesi 5 olan çoklu kümeleri sayarak işe başlayalım. (Bu yaklaşım bizi genel bir formüle götürecektir.) Çoklu kümelerin harflerini alfabetik sırada yazabiliriz. Şimdi, notasyonu biraz değiştirelim. Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi aynı harften oluşan grupları çubuklarla diğerlerinden ayıralım. Ayrıca, çoklu kümede yer almayan semboller için bile ayırma çubukları kullanalım.

Çoklu küme	Çubuklar ile ayrılan gruplar	Kod
$[a,a,b,c,d]$	$aa\vert b\vert c\vert d$	$**\vert *\vert *\vert *$
$[a,b,b,c,d]$	$a\vert bb\vert c\vert d$	$*\vert **\vert *\vert *$
$[a,b,c,c,d]$	$a\vert b\vert cc\vert d$	$*\vert *\vert **\vert *$
$[a,a,c,c,d]$	$aa\vert\vert cc\vert d$	$**\vert\vert **\vert *$
$[b,b,d,d,d]$	$\vert bb\vert\vert ddd$	$\vert **\vert\vert ***$
$[a,a,a,a,a]$	$aaaaa\vert\vert\vert$	$*****\vert\vert\vert$

Eğer her elemanı $*$ ile temsil edersek çoklu kümeleri $*$ ve $\vert$ sembollerini kullanarak aşağıdaki formda kodlayabiliriz.

$$\overbrace{*\cdots\cdots\cdots*}^{\text{her } a \text{ için bir } *} \;\Big|\; \overbrace{*\cdots\cdots\cdots*}^{\text{her } b \text{ için bir } *} \;\Big|\; \overbrace{*\cdots\cdots\cdots*}^{\text{her } c \text{ için bir } *} \;\Big|\; \overbrace{*\cdots\cdots\cdots*}^{\text{her } d \text{ için bir } *}$$

Şimdi, yukarıdaki tablonun sağdaki sütununa bakalım. Her bir kod, 5 tane yıldız ve 3 tane çubuktan oluşan bir listedir. Bu listenin toplam 8 tane girdisi vardır. Bu türde kaç liste vardır? Böyle bir listeyi oluştururken 8 konumdan 3 tanesini çubuklara ayırıp, geri kalan 5 konumu da yıldızlarla doldurabiliriz. Dolayısıyla bu türde $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ tane liste vardır.

Bu sayı sorumuzun cevabıdır: $X = \{a,b,c,d\}$ kümesindeki sembollerden oluşan ve **kardinalitesi 5 olan 56 tane çoklu küme** vardır.

Aynı yöntem, X kümesinin elemanlarından oluşan ve kardinalitesi 3 olan çoklu kümeleri saymak için de geçerlidir. Ancak bu kez 5 yerine 3 yıldız kullanılmalıdır. Buna göre 3 yıldız ile 3 çubuktan oluşan ve uzunluğu 6 olan listelerin sayılması gerekir. Bu şekilde $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ liste vardır. O hâlde $X = \{a,b,c,d\}$ kümesindeki harflerden yapılan ve kardinalitesi 3 olan 20 tane çoklu küme vardır. Bu sonuç, önceki sayfada bulduğumuzla aynıdır.

Genel olarak n elemanlı $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesinin elemanlarından oluşan ve kardinalitesi k olan çoklu bir küme, yıldız ve çubuk ile kodlanmış

$$\overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_1 \text{ için bir } *} \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_2 \text{ için bir } *} \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_3 \text{ için bir } *} \mid \cdots\cdots \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_n \text{ için bir } *}$$

biçiminde bir listedir. Bu liste, k tane yıldız ve $n-1$ tane çubuk içerir. (Yıldızların her biri çoklu kümenin bir elemanına karşılık gelir. Çubuklar, n tane yıldız grubunu birbirinden ayırır.) O hâlde listenin uzunluğu $k+n-1$ olur. Böyle bir listeyi, $k+n-1$ konumdan $n-1$ tanesini çubuklar için seçip geri kalanları yıldızlar ile doldurarak yapabiliriz. Bu şekilde $\binom{k+n-1}{n-1}$ tane liste vardır. Alternatif olarak k tane konumu yıldızlar için seçip, geri kalan $n-k$ tane konumu çubuklar ile doldurabiliriz. Bu şekilde $\binom{k+n-1}{k}$ tane liste vardır. Sayfa 91'deki Eşitlik 3.4'ten $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ olduğunu hatırlayınız.

Şimdi, yukarıda yaptığımız sayma işlemlerini özetleyelim.

Gözlem 3.7 Kardinalitesi k olan ve n elemanlı bir $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesinin elemanlarından oluşan çoklu kümelerin sayısı

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

ile verilir. Bunun sebebi şudur: X kümesinin n elemanından oluşturulan ve kardinalitesi k olan çoklu kümeler, yıldızlar ve çubuklar kullanılarak

$$\overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_1 \text{ için bir } *} \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_2 \text{ için bir } *} \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_3 \text{ için bir } *} \mid \cdots\cdots \mid \overbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *}^{\text{her } x_n \text{ için bir } *}$$

formunda bir liste ile modellenebilir. Bu liste, k tane yıldızdan ve n tane yıldız grubu birbirinden ayıran $n-1$ tane çubuktan oluşur. Böyle bir liste, çubuklar için $n-1$ tane konum seçip, geri kalanları yıldızlar ile doldurarak yapılabilir. Bu işi yapmanın $\binom{n+k-1}{n-1}$ yolu vardır.

Örneğin, 4 elemanlı $X = \{a, b, c, d\}$ kümesinden $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ tane 2 elemanlı çoklu küme oluşturulabilir. Bu sonuç, 96. sayfada bulduğumuz ile aynıdır. Benzer şekilde, X kümesinin elemanlarından $\binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$ tane 3 elemanlı çoklu küme oluşturulabilir. Bu da 96. sayfadakiyle aynıdır.

Yine X kümesinin elemanlarından $\binom{1+4-1}{1} = \binom{4}{1} = 4$ tane 1 elemanlı çoklu küme oluşturulabilir. Bunlar $[a], [b], [c]$ ve $[d]$ kümeleridir. Son olarak, X

kümesinin elemanlarından oluşturulabilecek 0 elemanlı çoklu küme sayısı $\binom{0+4-1}{0} = \binom{3}{0} = 1$'dir. Gerçekten de bu şekildeki tek çoklu küme boş kümedir.

Örnek 3.19 Bir torbada 20 tane kırmızı, 20 tane yeşil ve 20 tane mavi özdeş bilye vardır. Bunlardan 20 tanesini rastgele çekelim. Bu olayın pek çok olası sonucu vardır. Örneğin 11 kırmızı, 4 yeşil, 5 mavi veya 20 kırmızı, 0 yeşil, 0 mavi vb. bilye gelebilir. Buna göre kaç farklı sonuç ortaya çıkabilir?

Çözüm: Her sonuç, 3 elemanlı $X = \{\text{K},\text{Y},\text{M}\}$ kümesinin elemanlarından oluşan ve kardinalitesi 20 olan bir çoklu küme olarak düşünülebilir. Örneğin, 11 kırmızı, 4 yeşil ve 5 mavi bilyeye karşılık gelen çoklu küme

$$[\,\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{Y},\text{Y},\text{Y},\text{Y},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M}\,]$$

olur. Benzer şekilde 10 kırmızı ve 10 mavi bilyeye karşılık gelen çoklu küme

$$[\,\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M}\,].$$

ile verilir. Buna göre toplam sonuç sayısı, $X = \{\text{K},\text{Y},\text{M}\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan ve kardinalitesi 20 olan çoklu kümelerin sayısıdır. Gözlem 3.7 gereğince $\binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{20} = \mathbf{231}$ olası sonuç vardır.

Gözlem 3.7'deki formülü akılda tutmak yerine yıldız-çubuk modelini kullanmak daha iyidir çünkü bir problemin yıldız ve çubuklar ile nasıl modellenebileceğini görmek genellikle daha kolaydır. Problemin kurgusu yapıldıktan sonra Gözlem 3.7 otomatik bir şekilde gelir.

Örneğin, her sonucun 20 tane yıldız ve 2 tane çubuk içeren bir yıldız-çubuk koduna sahip olmasından hareket ederek Örnek 3.19'u çözebiliriz. (Mesela $[\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{K},\text{Y},\text{Y},\text{Y},\text{Y},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M},\text{M}]$ şeklinde gelen bir sonucun modellemesi $*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,|\,*\,*\,*\,*\,|\,*\,*\,*\,*\,*$ biçimindedir.) Böyle bir listeyi, 22 konumdan ikisini çubuklar için seçip geri kalan 20 tanesini yıldızlar ile doldurarak oluşturabiliriz. Bu işi yapmanın $\binom{22}{2} = 231$ yolu vardır.

Bir sonraki örnek, $x+y+z+w = 20$ denkleminin *negatif olmayan* tamsayı çözümlerinin sayısı ile ilgilidir. *Negatif olmayan tamsayı çözümlerinden* kasıt, bu denklemi sağlayan ve negatif olmayan tamsayılardır. Örneğin bu denklemin çözümlerinden biri $x = 7$, $y = 3$, $z = 5$ ve $w = 5$ ile verilir. Bunu kısaca $(x,y,z,w) = (7,3,5,5)$ şeklinde yazabiliriz. Bunun yanı sıra $(x,y,z,w) = (1,3,1,15)$ ve $(x,y,z,w) = (0,20,0,0)$ da birer çözümdür. Bunlara karşılık, denklemi sağlamasına rağmen $(x,y,z,w) = (1,-1,10,10)$ bir çözüm değildir çünkü y değeri negatiftir. Buna göre toplam olarak kaç tane çözüm vardır? Bir sonraki örnek, bu tür bir soruyu çözmenin bir yolunu gösterir.

Örnek 3.20 Eğer x, y, z ve w negatif olmayan tamsayılar ise $x+y+z+w=20$ denkleminin kaç tane çözümü vardır?

Çözüm: Herhangi bir çözümü yıldızlar ve çubuklar ile modelleyebiliriz. Örneğin $(x,y,z,w)=(3,4,5,8)$ çözümünü

$$\overbrace{*\,*\,*}^{3}\,|\,\overbrace{*\,*\,*\,*}^{4}\,|\,\overbrace{*\,*\,*\,*\,*}^{5}\,|\,\overbrace{*\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,*}^{8}$$

şeklinde kodlayabiliriz. Genel olarak $(x,y,z,w)=(a,b,c,d)$ çözümünü

$$\overbrace{*\ *\ *\cdots *}^{a \text{ tane yıldız}}\,|\,\overbrace{*\ *\ *\cdots *}^{b \text{ tane yıldız}}\,|\,\overbrace{*\ *\ *\cdots *}^{c \text{ tane yıldız}}\,|\,\overbrace{*\ *\ *\cdots *}^{d \text{ tane yıldız}}$$

ile kodlayabiliriz. Bu kod, 20 tane yıldız ile 3 tane çubuktan oluşur. Böylece $(x,y,z,w)=(0,0,10,10)$ çözümünü $||**********|**********$ şeklinde, $(x,y,z,w)=(7,3,5,5)$ çözümünü ise $*******|***|*****|*****$ şeklinde kodlayabiliriz. Buna göre denklemin negatif olmayan bir tamsayı çözümünü, 20 yıldız ile 3 çubuktan oluşan ve uzunluğu $20+3=23$ olan bir listeyle temsil edebiliriz. Böyle bir listeyi, 23 konumdan 3 tanesini çubuklar için seçip, geri kalan 20 konumu da yıldızlarla doldurarak yapabiliriz. Bu işi yapmanın $\binom{23}{3}=\frac{23!}{3!20!}=\frac{23\cdot22\cdot21}{3\cdot2}=23\cdot11\cdot7=1771$ tane yolu vardır. O hâlde $x+y+z+w=20$ denkleminin **1771** tane negatif olmayan tamsayı çözümü bulunmaktadır.

Bu örneği çözmenin başka bir yolu da $x+y+z+w=20$ denkleminin çözümlerini $\{x,y,z,w\}$ kümesinin 20 elemanlı çoklu kümeleri olarak modellemektir. Örneğin $(5,5,4,6)$ çözümü $[x,x,x,x,x,\ y,y,y,y,y,\ z,z,z,z,\ w,w,w,w,w,w]$ çoklu kümesine kaşılık gelir. Gözlem 3.7'den bu şekilde $\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}=1771$ tane çoklu küme vardır. Bu sayı, $x+y+z+w=20$ denkleminin çözüm sayısıdır.

Örnek 3.21 Bu problem $0\le x\le y\le z\le w\le 10$ şartını sağlayan (x,y,z,w) tamsayı listeleri hakkındadır. Burada her biri birer tamsayı olan girdiler küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. Örneğin $(0,3,3,7)$, $(1,1,1,1)$ ve $(2,3,6,9)$ istenilen şartı sağlar ama $(2,3,6,4)$ sağlamaz. Bu şekilde kaç liste vardır?

Çözüm: İlk çubuğun solundaki yıldız sayısı x, ikinci çubuğun solundaki yıldız sayısı y, üçüncü çubuğun solundaki yıldız sayısı z ve dördüncü çubuğun solundaki yıldız sayısı w olmak üzere böyle bir listeyi 10 yıldız ve 4 çubuk ile kodlayabiliriz.

Örneğin $(2,3,6,9)$ listesi $**|*|***|***|*$ olarak kodlanabilir. Benzer şekilde $(1,2,3,4)$ listesi $*|*|*|*|******$ olarak kodlanabilir.

Aşağıda üç tane liste, onlara karşılık gelen kodlar ile eşleştirilmiştir.

$$\begin{array}{ll} (0,3,3,7) & |***||****|*** \\ (1,1,1,1) & *||||********* \\ (9,9,9,10) & *********|||*| \end{array}$$

Bu kodlar, 10 yıldız ile 4 çubuktan oluşan ve uzunluğu 14 olan listelerdir. Böyle bir listeyi 14 konumdan 4 tanesini çubuklar için seçip geri kalanları yıldızlar ile doldurarak yapabiliriz. Bunu $\binom{14}{4} = 1001$ yolla yapabiliriz. **Cevap:** İstenilen özellikte **1001** adet liste vardır.

Şimdi, farklı bir çoklu küme problemine bakalım. Bunun için "SAAT" kelimesinin harflerinin permütasyonlarını düşünelim. İlk bakışta, bu kelimenin 4 tane harfi olduğu için $4! = 24$ adet permütasyonu olacağını düşünebiliriz. Ancak bu doğru değildir çünkü harflerin iki tanesi aynıdır. İki tane A'yı değiş tokuş ettiğimizde yine aynı permütasyonu elde ederiz. Bu sorunu çözebilmek için harflerden birini küçük harf yapalım: SAaT. Buna göre 24 permütasyon aşağıdaki ovalin içinde listelenmiştir.

SAaT	TAaS	AaTS	AaST	ASaT	ATaS	ATSa	ASTa	STAa	TSAa	TASa	SATa
SaAT	TaAS	aATS	aAST	aSAT	aTAS	aTSA	aSTA	STaA	TSaA	TaSA	SaTA
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
SAAT	TAAS	AATS	AAST	ASAT	ATAS	ATSA	ASTA	STAA	TSAA	TASA	SATA

Ovalin altındaki satırda da belirtildiği üzere SAAT kelimesinin aynı sütun içinde bulunan permütasyonları eşittir. Bu nedenle SAAT sözcüğünü oluşturan harflerinin aslında $\frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$ tane permütasyonu vardır.

Bu soru aslında bir çoklu küme problemidir. "SAAT" kelimesindeki harfler [S,A,A,T] çoklu kümesini oluşturur. Bu çoklu kümenin 12 tane permütasyonu vardır.

Başka bir örnek olarak ANANAS kelimesinin harflerinin permütasyonlarına bakalım. Bu sözcükte iki tane N, üç tane de A vardır. Bazı harfler aynı görünse de onları değiş tokuş ettiğimizde farklı bir sıralama elde edebileceğimiz fiziksel nesneler olarak düşününelim. Aslında burada altı tane farklı nesne olduğunu vurgulamak için alt indis kullanmak faydalı olabilir:

$$\mathrm{A}_1\,\mathrm{N}_1\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{N}_2\,\mathrm{A}_3\,\mathrm{S}.$$

Şimdi, bu altı harfin $6! = 720$ tane permütasyonu vardır. Bu permütasyonların hepsini yazmak pratik değildir. Ancak bunları aşağıdaki gibi kısmi olarak listelemek problemi anlamamıza yardımcı olur.

$A_1N_1A_2N_2A_3S$	$N_1A_1A_2N_2A_3S$	…	
$A_1N_1A_3N_2A_2S$	$N_1A_1A_3N_2A_2S$		
$A_2N_1A_1N_2A_3S$	$N_1A_2A_1N_2A_3S$	…	
$A_2N_1A_3N_2A_1S$	$N_1A_2A_3N_2A_1S$		
$A_3N_1A_2N_2A_1S$	$N_1A_3A_2N_2A_1S$	…	$A_1N_1A_2N_2A_3S$ sözcüğünün 720 permütasyonu
$A_3N_1A_1N_2A_2S$	$N_1A_3A_1N_2A_2S$		
$A_1N_2A_2N_1A_3S$	$N_2A_1A_2N_1A_3S$	…	
$A_1N_2A_3N_1A_2S$	$N_2A_1A_3N_1A_2S$		
$A_2N_2A_1N_1A_3S$	$N_2A_2A_1N_1A_3S$	…	
$A_2N_2A_3N_1A_1S$	$N_2A_2A_3N_1A_1S$		
$A_3N_2A_2N_1A_1S$	$N_2A_3A_2N_1A_1S$	…	
$A_3N_2A_1N_1A_2S$	$N_2A_3A_1N_1A_2S$		
↓ ANANAS	↓ NAANAS		

İlk sütun, ANANAS kelimesine karşılık gelen $A_1N_1A_2N_2A_3S$ ifadesinin permütasyonlarını listeler. Çarpma ilkesine göre bu sütunda $3!2! = 12$ permütasyon bulunur çünkü üç A_i sembolü kendi aralarında $3!$ yolla, iki N_i sembolü ise kendi aralarında $2!$ yolla sıralanabilir. Benzer şekilde ikinci sütun, NAANAS "sözcüğüne" karşılık gelen $3!2! = 12$ permütasyonu listeler.

$A_1N_1A_2N_2A_3S$ ifadesinin toplam olarak $6! = 720$ permütasyonu vardır bunların 12'şerli grupları ANANAS kelimesinin belirli bir permütasyonuna karşılık gelir. Bu nedenle ANANAS sözcüğünün toplam olarak $\frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{12} = 60$ tane permütasyonu vardır.

Yukarıda kullandığımız düşünceyi aşağıdaki gözlem ile genelleyelim.

Gözlem 3.8 Bir A kümesinde; katlılıkları $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olan n tane eleman olsun. Bu durumda A kümesinin toplam permütasyon sayısı

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots p_k!}$$

ile verilir.

Örnek 3.22 MISSISSIPPI'deki harflerin permütasyonlarının sayısı kaçtır?

Çözüm: Bu kelimeyi; bir M, dört I, dört S ve iki P içeren çoklu bir küme olarak düşünelim. Gözlem 3.8'den $\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34.650$ tane permütasyon vardır?

Örnek 3.23 $[1,1,1,1,5,5,10,25,25]$ çoklu kümesinin kaç tane permütasyonu vardır?

Çözüm: Gözlem 3.8 uyarınca $\frac{9!}{4!\,2!\,1!\,2!} = 3780$ tane permütasyonu vardır?

Bölüm 3.8 Alıştırmaları

1. $\{1,2,3,4\}$ sembollerinden kaç tane 10 elemanlı çoklu küme oluşturulabilir?
2. İngiliz alfabesindeki 26 harfden kaç tane 2 elemanlı çoklu küme oluşturulabilir?
3. Cebinizde her birinin toplam değeri 1 lira olan 1'er, 5'er, 10'ar ve 25'er kuruş bulunsun. Bu madeni paralardan 4 tanesini bir arkadaşınıza kaç farlı şekilde verebilirsiniz?
4. Bir torbada 20 kırmızı, 20 mavi, 20 yeşil ve 20 beyaz özdeş top vardır. Bu toplardan 15 tanesi kaç farklı şekilde çekilebilir?
5. Bir torbada 20 kırmızı, 20 mavi, 20 yeşil ve **bir** beyaz özdeş top vardır. Bu toplardan 15 tanesi kaç farklı şekilde çekilebilir?
6. Bir torbada 20 kırmızı, 20 mavi, 20 yeşil, 1 beyaz ve 1 siyah özdeş top vardır. Bu toplardan 20 tanesi kaç farklı şekilde çekilebilir?
7. 20 tane özdeş top 5 kutuya kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
8. Girdileri birer tamsayı olan ve $0 \le x \le y \le z \le 100$ koşulunu sağlayan kaç tane (x, y, z) listesi vardır?
9. Bir torbada 50 tane 1 kuruş, 50 tane 5 kuruş, 50 tane 10 kuruş ve 50 tane 25 kuruş vardır. Bu torbadan 30 tane madeni para kaç farklı şekilde çekilebilir?
10. $u+v+w+x+y+z=90$ denkleminin negatif olmayan kaç tamsayı çözümü vardır?
11. $w+x+y+z=100$ denkleminin tamsayı çözümlerinden kaç tanesi $w \ge 4$, $x \ge 2$, $y \ge 0$ ve $z \ge 0$ şartlarını sağlar?
12. $w+x+y+z=100$ denkleminin tamsayı çözümlerinden kaç tanesi $w \ge 7$, $x \ge 0$, $y \ge 5$ ve $z \ge 4$ şartlarını sağlar?
13. Alfabetik sırada olmak koşulu ile {A, B, C, D, E, F, G} kümesinin elemanlarından yapılan ve uzunluğu 6 olan kaç tane tekrarlı liste vardır? (Örneğin, BBCEGG olabilir fakat BBBAGG olamaz.)
14. "PEPPERMINT" kelimesindeki harflerinin kaç tane permütasyonu vardır?
15. "TENNESSEE" kelimesindeki harflerinin kaç tane permütasyonu vardır?
16. "TUKTUYAAQTUUQ" Kanada'nın kuzeybatısında yaşayan bir topluluğun yerel dildeki ismidir. Bu ismin kaç tane permütasyonu vardır?
17. Bir zar art arda alt kez atılılıyor. Olası sonuçların kaç tanesinde iki kez 1, üç kez 5 ve bir kez de 6 gelir?
18. Bir madeni para on kez atılılıyor. Olası sonuçların kaçında 3 yazı ile 7 tura gelir?
19. Her kutuda en fazla bir top olmak koşuluyla 15 özdeş top 20 kutuya kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
20. Beş tane çocuğa 25 tane şeker kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
21. 10.000 ile 99.999 arasındaki sayılardan kaç tanesi, bir ya da daha fazla sayıda 3, 4 veya 8 rakamı içerir ancak diğer rakamları içermez?

3.9 Bölme ve Güvercin Yuvası İlkeleri

Son olarak, **bölme ilkesi** olarak adlandırılan sayma ilkesini verelim. Ama öncelikle kullanacağımız notasyondan bahsedelim. Bir x sayısının **tabanı**, $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilen ve kendisinden küçük veya eşit olan ilk tamsayıdır. Örneğin $\lfloor \frac{10}{4} \rfloor = 2$, $\lfloor 9.31 \rfloor = 9$ ve $\lfloor 7 \rfloor = 7$'dir. **Tavanı** ise $\lceil x \rceil$ ile gösterilen ve kendisinden büyük veya eşit olan ilk tamsayıdır. Örneğin $\lceil \frac{10}{4} \rceil = 3$, $\lfloor 9.31 \rceil = 10$ ve $\lceil 7 \rceil = 7$'dir.

Bölme ilkesi güvercinlerle açıklanabilir. Bunun için k tane yuvada yaşayan n tane güvercin düşünelim. (Burada $n \neq k$ olabilir.) Geceleri bütün güvercinler yuvaya girer. O vakitte, yuvalardan bazılarında birden fazla güvercin olabilir ve bazıları boş kalabilir. Fakat ne olursa olsun, yuva başına ortalama $\frac{n}{k}$ tane güvercin düşer. Aslında yuvalardan en az biri $\frac{n}{k}$ veya daha fazla sayıda güvercin içerir. (Çünkü tüm yuvalar aynı anda yuva başına düşen ortalama güvercin sayısından daha az güvercin içeremez.) Ayrıca, bu sayı yukarı yuvarlanmalıdır çünkü her yuvadaki güvercin sayısı bir tamsayıdır. O hâlde en az bir yuva $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ tane veya daha fazla güvercin içerir.

Benzer şekilde en az bir yuvada $\frac{n}{k}$ ya da daha az sayıda güvercin vardır çünkü tüm yuvalar, yuva başına düşen ortalama güvercin sayısından daha fazla güvercini anyı anda içeremez. Bu sayı aşağı yuvarlandığında en az bir yuvada $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ya da az sayıda güvercin olduğu görülür.

Bu düşünceye bölme prensibi denir. (Bazı kitaplar bunu *güvercin yuvası ilkesinin güçlü formu* olarak adlandırır.)

Gözlem 3.9 (Bölme İlkesi)
Kabul edelim ki n tane nesne k tane kutuya yerleştirilsin. Bu durumda:
- En az bir kutu $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ ya da daha fazla sayıda nesne içerir.
- En az bir kutu $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ya da daha az sayıda nesne içerir.

Bu gözlemin kullanışlı bir versiyonu daha vardır. Eğer $n > k$ ise $\frac{n}{k} > 1$ olur. Buradan $\lceil \frac{n}{k} \rceil > 1$ elde edilir. Yani kutulardan teki birden fazla nesne içerir. Öte yandan, eğer $n < k$ ise $\frac{n}{k} < 1$ olur. Buradan $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor < 1$ bulunur. Yani kutulardan en az biri boştur. Böylelikle bölme ilkesi kullanılarak, *güvercin yuvası ilkesi* adı verilen aşağıdaki ilke elde edilir.

Gözlem 3.10 (Güvercin Yuvası İlkesi)
Kabul edelim ki n tane nesne k tane kutuya yerleştirilsin. Bu durumda:
- Eğer $n > k$ ise en az bir kutu birden fazla nesne içerir.
- Eğer $n < k$ ise en az bir kutu boştur.

Güvercin yuvası ilkesi, adını n tane güvercinin k tane yuvaya (veya kafese) girdiği senaryodan alır. Eğer yuva sayısından daha çok güvercin varsa ($n > k$) bazı yuvalar birden fazla güvercin içerir. Eğer yuva sayısından daha az güvercin varsa ($n < k$) o zaman en az bir yuva boş kalır.

Çarpma, toplama ve çıkarma ilkeleri gibi gayet açık ve net olan bölme ve güvercin yuvası ilkeleri; açık olmayan önermeleri ispatlamak için kullanılır. Buradaki zorluk, onların nerede ve nasıl uygulanacaklarını görmektir. Bunun için basitten başlayıp giderek zorlaşan örneklere bakalım.

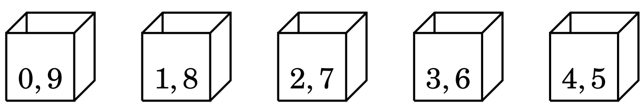
Dikkat edilirse 13 kişilik bir gruptaki en az iki kişi aynı ay doğmuştur. Son derece açık olan bu sonuç gerçekten de güvercin yuvası ilkesine dayanır. Bunu görmek için 13 kişiden herbirini birer nesne olarak düşünelim ve onları doğum ayları olan "kutulara" koyalım. Kutulardan (aylardan) daha fazla sayıda insan olduğu için en az bir kutuda (ayda) iki veya daha fazla kişi vardır. Bu, 13 kişiden en az ikisinin aynı ayda doğduğu anlamına gelir.

Ayrıca, bölme ilkesine göre 100 kişilik herhangi bir gruptaki $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$ veya daha fazla kişi aynı ayda doğmuştur. Buna ek olarak bölme ilkesi, $\lfloor \frac{100}{12} \rfloor = 8$ veya daha az sayıda kişinin doğduğu bir ay olduğunu garanti eder.

Örnek 3.24 Birbirinden farklı altı tane rakam rastgele seçilsin. Bunlardan iki tanesinin toplamının 9 olduğunu gösteriniz.

Örneğin 0, 1, 3, 5, 7 ve 8 seçtiğinizi varsayalım. Buna göre $1+8=9$ olur. Eğer 4, 5, 6, 7, 8, 9 seçseydiniz $4+5=9$ olurdu. Problem, rakamları nasıl seçersek seçelim bunun daima doğru olduğunu göstermemizi istemektedir.

Çözüm: Altı tane faklı rakamı ele alalım. Bunlardan ikisinin toplamının 9 olmasının sebebi şudur: Aşağıda gösterildiği gibi, her biri iki tane rakam ile etiketlenmiş beş adet kutu düşünelim. Bu kutuların üzerindeki rakamlar, toplamları 9 olacak şekilde seçilmiştir.

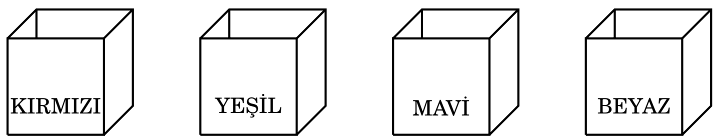


Seçtiğimiz her rakamı, üzerinde o rakam yazan kutuya koyalım. Örneğin, eğer 7 rakamını seçtiysek onu üzerinde "2, 7" yazan kutuya koyalım. (Eğer seçildiyse, 2 rakamı da bu kutuya girecektir.) Seçilen altı rakamı bu şekilde beş kutuya yerleştirelim. Kutulardan daha çok sayıda rakam olduğu için güvercin yuvası ilkesi gereğince bazı kutular birden fazla (yani iki tane) rakam içerir. Bu rakamların toplamı 9'dur.

Eğer sadece beş tane rakam seçmiş olsaydık bunlardan ikisinin toplamı 9 olmayabilirdi. Örneğin şanssız bir şekilde 0, 1, 2, 3, 4 rakamlarını seçebilirdik. Ancak *altı* tane rakam seçtiğimiz zaman, güvercin yuvası ilkesi bunlardan ikisinin toplamın 9 olacağını garanti eder.

Örnek 3.25 Bir mağazada bulunan satış makinası; içerisinde karışmış hâlde bulunan kırmızı, yeşil, mavi ve beyaz renkli sakızların tanesini 5 kuruştan satmaktadır. Mağaza, belirli sayıda alınan sakızlardan 13 veya daha fazlasının aynı renkte olması durumunda promosyon olarak 5 lira ödemektedir. Bu promosyondan yararlanmak için en az kaç sakız alınmalıdır?

Çözüm: Satın alınan sakızların sayısı n olsun. Bu sakızları KIRMIZI, YEŞİL, MAVİ ve BEYAZ olarak adlandırdığımız kutulara koyduğumuzu düşünelim. (Yani kırmızı sakızlar kırmızı kutuya, yeşil sakızlar yeşil kutuya vs.)



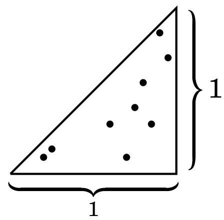
Bölme ilkesine göre en az bir kutu $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ veya daha fazla sayıda sakız içerir. Eğer $\lceil \frac{n}{4} \rceil \geq 13$ ise sakızlardan 13 tanesi aynı renktedir. Bu da $\frac{n}{4} > 12$ olması ile mümkündür. (Yani $\frac{n}{4}$ kesrinin tavanı 12'den büyük bir tamsayı olmalıdır.) Buna göre $n > 4 \cdot 12 = 48$ yani $n = 49$ olduğunda, satın alınan sakızlardan en az $\lceil \frac{49}{4} \rceil = \lceil 12.25 \rceil = 13$ tanesinin aynı renkte olacağını söyleyebiliriz.

Cevap: Makinaya 49 tane beş kuruş yani $2,45$ lira atarak 49 adet sakız alınması gerekir. Bu durumda kazanacağınız 5 liradan $2,55$ lirası size kalır.

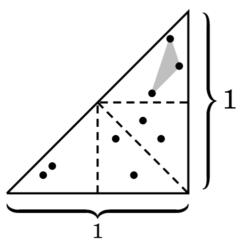
Yalnızca 48 tane sakız aldığınızda da belki kazanabilirsiniz. Ancak bu durumda her renkten 12 tane sakız gelme ve 5 lirayı kaçırma ihtimali bulunmaktadır. Ayrıca 49'dan fazla sakız satın aldığınızda da 5 lira kazanırsınız ancak makinaya gerekenden daha fazla 5 kuruş atmış olursunuz.

Yukarıdaki soruyu çözmek için ille de kutuları kullanmak gerekmez. Bazı insanlar sadece ortalamaya dayanarak bir sonuç çıkarmayı tercih eder. Problemi bu yolla çözmek için toplam sakız sayısına n, kırmızı sakız sayısına k, yeşil sakız sayısına y, mavi sakız sayısına m, beyaz sakız sayısına b diyelim ve $n = k + y + m + b$ yazalım. Buna göre belirli bir renkte ortalama $\frac{k+y+m+b}{4} = \frac{n}{4}$ tane sakız vardır. Aynı renkten 13 tane sakız olabilmesi için bu ortalamanın 12'den büyük olması gerekir ve bu şartı sağlayan en küçük sayı $n = 49$'dur. Bu yöntem, bölme ilkesinin en sade hâlidir.

Örnek 3.26 Aşağıdaki dik üçgenin içerisine dokuz tane nokta rastgele yerleştirilsin. Bu noktalardan üçünün, alanı $\frac{1}{8}$ birimkare veya daha az olan bir üçgen oluşturduğunu gösteriniz. (Burada, alanı sıfır olan yani köşeleri aynı doğru üzerinde bulunan üçgenlere izin verilmektedir.)



Çözüm: Aşağıda gösterildiği gibi verilen üçgeni kesikli çizgilerle dört tane üçgene ayıralım. Küçük üçgenlerden herbirinin alanı $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ birimkaredir. Aslında küçük üçgenleri birer "kutu" olarak düşünebiliriz. Buna göre 9 tane nokta 4 tane kutuya yerleştirilmiştir. (Kesikli çizgilerin üzerinde olan noktaları, aşağısındaki veya solundaki kutuya ait kabul edelim.) Bölme ilkesine göre $\lceil \frac{9}{4} \rceil = 3$ tane nokta içeren en az bir kutu vardır. Bu üç noktanın oluşturduğu üçgenin alanı, içerisinde bulunduğu "kutunun" alanından daha büyük olamaz. Sonuç olarak bu üç nokta, alanı $\frac{1}{8}$ veya daha az olan bir üçgen oluşturur.



Bölüm 3.9 Alıştırmaları

1. Altı tane doğal sayı rastgele seçilsin. Bunlardan en az ikisinin 5 ile bölümlerinden kalan sayıların aynı olduğunu gösteriniz.
2. Belirli sayıda kart, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden yüzleri aşağı dönük bir şekilde dağıtılıyor. Aynı türden beş tane kart olduğundan emin olmak için yerde en az kaç tane kart olmalıdır?
3. Bir zar en az kaç defa atıldığında 10 veya daha çok kez aynı sonuç gelir?
4. Kenar uzunlukları birer birim olan bir karenin içinden rastgele beş tane nokta seçelim. Bu noktalardan en az ikisinin birbirlerine en fazla $\frac{\sqrt{2}}{2}$ birim uzaklıkta olduklarını gösteriniz.
5. Birbirinden farklı yedi tane doğal sayıdan oluşan bir kümede, toplamları veya farkları 10 ile bölünen iki tane tamsayının olduğunu ispatlayınız.
6. *Büyük daire*, bir S küresinin kendi merkezinden geçen düzlem ile kesişimidir. Her büyük daire, S küresini iki parçaya ayırır. *Yarımküre*, bu parçalardan birinin büyük daire ile birleşimidir. Eğer S küresinin içine beş tane nokta rastgele yerleştirilirse bunlardan dördünü içeren bir yarımkürenin var olduğunu gösteriniz.

3.10 Kombinatoryal İspat

Kombinatoryal ispat, iki ifadenin eşit olduğunu kanıtlamak için onların aynı sayma probleminin cevapları olduğunu göstermeye dayanan bir ispat yöntemdir. Aslında bu yöntemi (adına kombinatoryal ispat *demeden*) 90. sayfada kullandık ve $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ Pascal eşitliğini gösterdik.

İspatı yaparken şu argümanı kullandık. Eşitliğinin sol tarafındaki $\binom{n+1}{k}$ sayısı, $n+1$ tane elemanı olan $S = \{0,1,2,\ldots,n\}$ kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Eşitliğin sağ tarafı da aynı sayıya eşittir çünkü S'nin k elemanlı altkümeleri 0 elemanını ya içerir ya içermez. S'nin 0 içeren k elemanlı altkümelerini, 0 ile başlayıp $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinden $k-1$ tane eleman seçerek $\binom{n}{k-1}$ yolla oluşturabiliriz. Buna karşılık 0 içermeyen k elemanlı altkümeleri, $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesinden k tane eleman seçerek $\binom{n}{k}$ yolla oluşturabiliriz. Bu nedenle

$$\underbrace{\binom{n+1}{k}}_{\substack{S=\{0,1,\ldots,n\}\\ \text{kümesinin}\\ k \text{ elemanlı}\\ \text{altküme sayısı}}} = \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\substack{S \text{ kümesinin}\\ 0 \text{ içeren}\\ k \text{ elemanlı}\\ \text{altküme sayısı}}} + \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{S \text{ kümesinin}\\ 0 \text{ içermeyen}\\ k \text{ elemanlı}\\ \text{altküme sayısı}}}$$

yazabiliriz. Her iki taraf da S kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısı olduğu için bu eşitlik doğrudur. Bu bir kombinatoryal ispattır.

Örnek 3.27 Kombinatoryal ispat ile $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Eğer $k < 0$ veya $k > n$ ise bu eşitliğin her iki tarafı da tanımı gereği 0 olur. Yani eşitlik doğal olarak sağlanır. Bu nedenle ispatın geri kalan kısmında $0 \le k \le n$ olduğunu varsayabiliriz.

Eşitliğin sol tarafındaki $\binom{n}{k}$ ifadesi, $S = \{1,2,\ldots,n\}$ kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Dikkat edilirse k elemanlı her $X \subseteq S$ altkümesi, $n-k$ elemanlı tek bir $\overline{X} = S - X \subseteq S$ altkümesi ile eşlenebilir. O hâlde, S'nin k ve $n-k$ elemanlı altkümelerinin sayıları aynıdır. Yani, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olur.

Aslında $\binom{n}{k}$ için verilen formülü kullanarak da $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ eşitliğini hızlıca gösterebilirdik:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)!\big)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Terimlerin *anlamını* kullandığı için kombinatoryal ispatların biraz "aldatıcı" olduğunu hissedebilirsiniz. Bir sonraki örnekte olduğu gibi kombinatoryal ispatlar genel olarak formülleri kullanmaktan daha kolaydır.

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ olduğunu gösterelim. Bu eşitilik $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$ ile ifade edilebilir. Örneğin, $n=5$ için $\binom{5}{0}^2+\binom{5}{1}^2+\binom{5}{2}^2+\binom{5}{3}^2+\binom{5}{4}^2+\binom{5}{5}^2=\binom{2\cdot 5}{5}$ ya da daha açık olarak

$$1^2+5^2+10^2+10^2+5^2+1^2=\binom{10}{5}$$

yazılabilir. Her iki tarafı da 252 olduğu için yukarıdaki eşitlik doğrudur. Genellersek bu önerme, Pascal üçgeninin $n-$yinci satırında bulunan terimlerin kareleri toplamının $\binom{2n}{n}$ olduğunu belirtir.

Örnek 3.28 Kombinatoryal ispat ile $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Dikkat edilirse $2n$ elemanlı bir S kümesinden n tane eleman $\binom{2n}{n}$ yolla seçilebilir. Bu sayı eşitliğin sağ tarafında verilmiştir.

Bunu farklı bir şekilde sayalım. $|A|=n$, $|B|=n$ ve $A\cap B=\emptyset$ olmak üzere S kümesini $S=A\cup B$ şeklinde iki parçaya ayıralım.

Şimdi $0\le k\le n$ şartını sağlayan sabit bir k için A kümesinden k tane, B kümesinden $n-k$ tane eleman seçelim. Bu şekilde S'den toplam $k+(n-k)=n$ tane eleman seçmiş oluruz. Çarpma ilkesine göre bu şekilde S kümesinin $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tane n elemanlı altkümesini elde ederiz.

Buradaki k tamsayısı 0 ile n arasındaki herhangi bir tamsayıdır. Buna göre S kümesinden n tane eleman

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{A\text{'dan }0}\underbrace{\binom{n}{n-0}}_{B\text{'den }n}+\underbrace{\binom{n}{1}}_{A\text{'dan }1}\underbrace{\binom{n}{n-1}}_{B\text{'den }n-1}+\underbrace{\binom{n}{2}}_{A\text{'dan }2}\underbrace{\binom{n}{n-2}}_{B\text{'den }n-2}+\underbrace{\binom{n}{3}}_{A\text{'dan }3}\underbrace{\binom{n}{n-3}}_{B\text{'den }n-3}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}}_{A\text{'dan }n}\underbrace{\binom{n}{0}}_{B\text{'den }0}$$

yolla seçilebilir. Bu ifadeyi, $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ eşitliğini kullanarak,

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}\quad\text{veya}\quad\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

şeklinde yazabiliriz.

Özetleyecek olursak S kümesinden n tane eleman seçme yolarını iki farklı şekilde saydık. İlk metot ile bu sayının $\binom{2n}{n}$ tane, ikinci metot ile $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ tane olduğunu gördük. Sonuç olarak $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$ olmalıdır.

Kombinatoryal ispat yöntemini kullanmak için fırsatları kollamalı ve diğer derslerdeki ispatları okurken bunlara dikkat etmelisiniz. Ayrıca aşağıdaki alıştırmalardan bazılarını deneyebilirsniz. İşe yarayan bir fikre ulaşmak için bazen yaratıcı bir şekilde düşünmek ve yanlış başlangıçlar yapmak gerekir. Bunu başardığınızda, çözüm genellikle çok basittir.

Bölüm 3.10 Alıştırmaları

Kombinatoryal ispat yöntemiyle aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız. Buradaki m,n,k ve p değişkenlerini negatif olmayan tamsayılar olarak kabul edebilirsiniz.

1. $1(n-0)+2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+\cdots+(n-1)2+(n-0)1=\binom{n+2}{3}$

2. $1+2+3+\cdots+n=\binom{n+1}{2}$

3. $\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}=\binom{n}{k}\binom{k}{2}$

4. $P(n,k)=P(n-1,k)+k\cdot P(n-1,k-1)$

5. $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$

6. $\binom{3n}{3}=3\binom{n}{3}+6n\binom{n}{2}+n^3$

7. $\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}=\binom{m+n}{p}$

8. $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p+k}=\binom{m+n}{m+p}$

9. $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$

10. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$

11. $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$

12. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$

Kısım II

Koşullu Önermeler Nasıl İspatlanır?

ÜNİTE 4

Doğrudan İspat

Artık bazı teoremleri ispatlama vakti geldi. Bunu yapmak için çeşitli yollar vardır. Şimdi bu yolların en basiti olan ve *doğrudan ispat* olarak adlandırılan yöntemi inceleyelim. Bu işe başlarken, şu üç anahtar terimin anlamını akılda tutmak önemlidir: *teorem, ispat* ve *tanım*.

Doğru bir matematiksel önermeye **teorem** denir. Buna göre bir teorem doğrulanabilir (ve doğrulanmış) olmalıdır. Hiç bir şüpheye yer bırakmaksızın, bir teoreminin kesinlikle doğru olduğunu gösteren yazılı ifadeye teoremin **ispatı** denir. Bir ispat anlaşılabilir olmalıdır. Yeterli altyapıya ve bilgiye sahip herkesi ikna edebilmelidir. Buradaki bilgiden kasıt; teorem ve ispatının içerdiği matematiksel kelimelerin, ifadelerin ve sembollerin anlamlarını kavrayabilmektir. İspatta kullanılan her kelime, hem ispatı yazan hem de ispatı okuyan için aynı anlama gelmelidir. Aksi hâlde giderilemeyecek bir belirsizlik ortaya çıkar. **Tanım**, matematiksel bir kelime veya ifadenin anlamının tam ve net açıklamasıdır. Önümüzdeki iki bölüm boyunca *teorem* ve *tanım* kavramları üzerinde duracağız. Daha sonra ispatları yazmaya hazır olacağız.

4.1 Teoremler

Teorem, doğru olduğu ispatlanmış olan bir önermedir. Matematik eğitiminiz boyunca birçok teoremle karşılaştınız. Aşağıda, lisans düzeyindeki analiz kitaplarında bulunan bazı teoremler verilmiştir. İspatlarını okumamış olsanız bile bu teoremler size tanıdık gelecektir.

> **Teorem:** Bir f fonksiyonu I açık aralığında diferansiyellenebilir ve $c \in I$ olsun. Eğer f fonksiyonunun I üzerindeki maksimum veya minimum değeri $f(c)$ ise $f'(c) = 0$ olur.

> **Teorem:** Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak ise $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olur.

> **Teorem:** Kabul edelim ki f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f aynı aralık üzerinde integrallenebilirdir.

> **Teorem:** Mutlak yakınsak olan her seri yakınsaktır.

Dikkat edilirse yukarıdaki teoremlerden her biri ya *"Eğer P ise Q."* koşullu formundadır ya da bu forma dönüştürülebilir. İlk teorem, bir takım kurgu yapan *"Bir f fonksiyonu I açık aralığında diferansiyellenebilir ve $c \in I$ olsun."* cümlesiyle başlar ve koşullu önerme bundan sonra gelir. Üçüncü teorem ise *"Kabul edelim ki P. Bu durumda Q."* formundadır ve bu ifade *"Eğer P ise Q."* ile aynı anlama gelir. Son teorem ise *"Eğer bir seri mutlak yakınsak ise yakınsaktır."* şeklinde yeniden yazılabilir.

Başka bir örnek daha verelim. Örnek 3.28'de verilen $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ ifadesindeki n değerinin (s. 109) bir *tamsayı* olduğu vurgulamak için bu önermeyi koşullu formda ifade etmek daha iyidir.

Teorem: Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ olur.

"Eğer P ise Q." formundaki bir teorem, P önermesinden yeni bilgi üreten bir araç olarak düşünülebilir. Böyle bir teorem, P doğru olduğunda Q'nun da doğru olacağını garanti eder. Bilgilerin bu şekilde türetilmesi yararlı olduğu için *"Eğer P ise Q."* formundaki teoremler oldukça yaygındır.

Fakat *her* teorem koşullu bir formda olmak zorunda değildir. Bazıları çift koşula sahip olan $P \Leftrightarrow Q$ formundadır ve bunlar iki tane koşullu önerme ile ifade edilebilir. Diğer teoremler ise belirli konular hakkındaki gözlemleri belirtir. Bunun bir örneği, analiz dersinden bildiğiniz aşağıdaki teoremdir.

Teorem: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ harmonik serisi ıraksaktır.

Bu teoremi koşullu bir önerme olarak ifade etmek zordur (edilse de garip olur). Yine de teoremlerin çoğu koşullu birer önermedir. Bundan dolayı kitabın büyük bir kısmı bu türdeki teoremler üzerine yoğunlaşacaktır.

"Teorem" kelimesiyle aynı anlama gelen birkaç kelime daha vardır. Ama bu kelimeler biraz farklı şekilde kullanılır. Genel olarak "teorem" kelimesi, önemli olan veya önemli kabul edilen önermeler için rezerve edilir (örneğin, Pisagor teoremi). Doğru ama çok önemli olmayanlar önermeler için bazen sadece **önerme** kelimesi kullanılır. **Lemma**, asıl amacı başka bir teoremi ispatlamaya yardım etmek olan bir teoremdir. **Sonuç**, bir teoremin veya önemenin hemen ardından yapılan doğrudan ve doğal çıkarımdır. Şimdilik bu kelimelerin hepsini hatırlamak çok da önemli değildir. Bunları kullandıkça, anlamları yerine oturacaktır.

Asıl amacımız teoremlerin nasıl ispatlandığını öğrenmektir. Yukarıdaki örneklerden görüleceği üzere teoremleri kanıtlamak için koşullu önermelerin anlamını çok iyi bilmek gerekir. Ünite 2'de koşullu önermeleri kapsamlı bir şekilde çalışmamızın ana sebebi budur. Buna ek olarak tanımların rolünü anlamak da çok önemlidir.

4.2 Tanımlar

Bir teoremin ispatı kesinlikle inandırıcı olmalıdır. Belirsizlikten kaçınmak gerekir. Her matematiksel terimin tam ve net anlamı konusunda herkes hemfikir olmalıdır. Ünite 1'de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \emptyset$ kümeleri ile $\in$ ve $\subseteq$ sembollerini tanımladık. Bunları sık bir şekilde kullanacağız. Şimdi, yine sıklıkla kullanacağımız birkaç tanım daha verelim.

Tanım 4.1 Eğer $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n **çifttir**.

Örneğin, $10 = 2 \cdot 5$ olduğu için 10 çifttir. Ancak bu tanıma göre 7 çift değildir çünkü $7 = 2a$ olacak şekilde bir a tamsayısı yoktur. Çift olmayan bir sayıyı tek sayı olarak tanımlamanın yanlış bir tarafı olmasa da aşağıdaki tanım daha elle tutulurdur.

Tanım 4.2 Eğer $n = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n **tektir**.

Örneğin, $7 = 2 \cdot 3 + 1$ olduğu için 7 tektir. Bu tanımları, çift veya tek sayı kavramlarıyla ilgilenirken kullanırız. İlk tanım, uygun bir a tamsayısı kullanılarak, bir çift sayının $2a$ şeklinde yazılabileceğini belirtir. İkinci tanım, b bir tamsayı olmak üzere eğer bir sayı $2b + 1$ formunda ise bu sayının tek sayı olduğunu söyler.

Tanım 4.3 Her ikisi de tek veya her ikisi de çift olan iki tamsayı **aynı pariteye** sahiptir. Aksi hâlde bu sayılar **karşıt paritelidir**.

Bu tanıma göre 5 ve -17 aynı pariteye sahiptir. Benzer şekilde 8 ve 0 aynı paritelidir. Ancak 3 ve 4 karşıt paritelidir.

Tanımlar hakkında iki noktaya temas edelim. Birincisi, bu kitapta tanımlanan kelimeler ve terimler koyu harflerle yazılmıştır. İkincisi, anlamını tam olarak karşılamak için tanımları çift koşullu önermelerle ifade etmek daha uygundur ancak onları tek koşullu önermelerle ifade etmek daha yaygındır. Örneğin, çift sayı tanımından şu anlaşılır: Eğer n çift ise $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır ve eğer $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n çifttir. Bu nedenle tanım teknik olarak *"Bir n tamsayısı çifttir ancak ve ancak $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır."* biçimindedir. Fakat her ne kadar çift koşullu bir önerme şeklinde yorumlansa da tanımları tek koşullu formda ifade etmek neredeyse evrensel bir kural hâline gelmiştir. Bunun, kelimeleri ekonomik olarak kullanmaktan başka iyi bir açıklaması yoktur. Tanımları yazmanın standart yolu budur ve buna alışmak gerekir.

Aşağıda sıklıkla kullanacağımız başka bir tanım verilmiştir.

Tanım 4.4 Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı olsun. Eğer $b = ac$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ var ise $a \mid b$ yazılır ve a **böler** b diye okunur. Ayrıca a tamsayısı b'nin bir **bölenidir** veya b tamsayısı a'nın bir **katıdır** da denir.

Örneğin, $15 = 3 \cdot 5$ olduğu için 5 tamsayısı 15'i böler. Bunu belirtmek için $5 \mid 15$ yazılır. Benzer şekilde $32 = 8 \cdot 4$ olduğu için $8 \mid 32$ ve $6 = (-6) \cdot (-1)$ olduğu için $-6 \mid 6$ olur. Fakat 6 tamsayısı 9'u bölmez çünkü $9 = 6 \cdot c$ olacak şekilde bir c tamsayısı yoktur. Bu durumda "6 *bölmez* 9" denir ve $6 \nmid 9$ yazılır.

Sembolleri yorumlarken dikkat edilmelidir çünkü $a \mid b$ ile a/b arasında büyük bir fark vardır. Burada, $a \mid b$ ifadesi bir *önermedir* fakat a/b ifadesi bir kesirdir. Örneğin, $8 \mid 16$ doğrudur fakat $8 \mid 20$ yanlıştır. Buna karşılık $8/16 = 0,5$ ve $8/20 = 0,4$ birer sayıdır fakat önerme değildir. Bunlardan birini ifade etmek isterken yanlışlıkla diğerini yazmamaya özen gösterilmelidir.

Her tamsayının bölenlerinden oluşan bir küme vardır. Örneğin 6'nın bölenlerinin kümesi $\{a \in \mathbb{Z} : a \mid 6\} = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ ile verilir. Benzer şekilde 5'in bölenlerinin kümesi $\{-5, -1, 1, 5\}$ olur. Dikkat edilirse 0'ın bölenlerinin kümesi $\mathbb{Z}$'dir. Bu bizi aşina olduğumuz aşağıdaki tanıma yönlendirir.

Tanım 4.5 Sadece iki tane pozitif böleni (1 ve kendisi) olan bir n doğal sayısına **asal sayı** denir. İkiden fazla pozitif böleni olan bir doğal sayıya **bileşik sayı** denir. (Böylelikle $1 < a, b < n$ olmak üzere n bileşiktir ancak ve ancak $n = ab$'dir.)

Örneğin 2, 5 ve 17 birer asal sayıdır. Bu tanıma göre 1 ne asaldır ne de bileşiktir çünkü sadece bir tane pozitif böleni vardır ve bu bölen 1'dir.

Tanım 4.6 Hem a hem de b tamsayısını bölen en büyük sayıya a ile b'nin **en büyük ortak böleni** denir. Bu sayı $\operatorname{ebob}(a, b)$ ile gösterilir.

Sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının birer katı olan en küçük doğal sayıya a ile b'nin **en küçük ortak katı** denir. Bu sayı $\operatorname{ekok}(a, b)$ ile gösterilir.

Buna göre $\operatorname{ebob}(18, 24) = 6$, $\operatorname{ebob}(5, 5) = 5$ ve $\operatorname{ebob}(32, -8) = 8$ olur. Benzer şekilde $\operatorname{ebob}(50, 18) = 2$ ve $\operatorname{ebob}(50, 9) = 1$'dir. Ayrıca $\operatorname{ebob}(0, 6) = 6$ olur çünkü her tamsayı 0'ı böler ancak 6'nın en büyük böleni 6'dır.

Dikkat edilirse $\operatorname{ebob}(0, 0)$ ifadesi biraz sorunludur. Her tamsayı 0'ı böler. Buradan $\operatorname{ebob}(0, 0) = \infty$ sonucu çıkar. Bunun üstesinden gelmek için $\operatorname{ebob}(a, b)$ ifadesindeki a ve b tamsayılarından en az biri sıfırdan farklı kabul edilir.

Örneklerimize devam edecek olursak $\operatorname{ekok}(4, 6) = 12$ ve $\operatorname{ekok}(7, 7) = 7$ olur.

Kuşkusuz ki terimlerin hepsi birden tanımlanamaz. Eğer bir tanımdaki her kelime tanımlanacak olsaydı, burada kullanılan kelimeler için ayrı tanımlar yapılması ve tanımlanan kelimeler zinciri dairesel olana kadar bu sürecin devam ettirilmesi gerekirdi. Bu nedenle hiçbir tanımlama ve doğrulama gerektirmeyen bazı kavramların doğru olduğu kabul edebiliriz. Örneğin bir tamsayının (veya reel sayının) ne olduğunu tanımlamaya gerek yoktur. Toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerini de tanımlamadan özgür bir şekilde kullanabiliriz. Bu tür kavramları, toplama ve çarpma işlemlerinin değişme ile dağılma özelliklerindeki ya da aritmetik ve cebirin diğer standart özelliklerindeki gibi, doğru kabul ederek kullanabiliriz.

Bölüm 1.9'da belirtildiği gibi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri üzerinde doğal bir sıralamanın var olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre örneğin "$5 < 7$" ve "$x < y$ ise $-x > -y$" gibi önermeleri doğrulamaya gerek yoktur.

Ayrıca ispatını vermeksizin aşağıdaki gözlemi doğru kabul edebiliriz.

Gözlem 4.1 Eğer a ve b iki tamsayı ise bunların toplamı, çarpımı ve farkı birer tamsayıdır. Yani $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$ ve $ab \in \mathbb{Z}$ olur.

Buna göre tamsayıların $+$, $-$ ve $\cdot$ işlemleri altında elde edilen kombinasyonları da birer tamsayıdır. Örneğin $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ise $a^2b - ca + b \in \mathbb{Z}$ olur.

Herhangi bir a tamsayısı, pozitif bir b tamsayısına bölünerek q bölümü ve r kalanı elde edilir. Buradaki q ve r tamsayıları bir tektir. Örneğin $a = 17$ tamsayısı 3 ile bölünerek $q = 5$ bölümü ve $r = 2$ kalanı bulunur. Sembolik olarak $17 = 5 \cdot 3 + 2$ veya $a = q \cdot b + r$ yazılabilir. *Bölme algoritması* olarak adlandırılan bu gözlemden 30. sayfada bahsedilmiştir.

(Bölme Algoritması) Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı ve $b > 0$ olsun. Bu durumda $a = qb + r$ ve $0 \leq r < b$ olacak şekilde q ve r tamsayıları vardır.

İspatı (en azından şimdilik) olmadan kabul edeceğimiz gözlemlerden biri de şudur: 1'den büyük olan her doğal sayı, asal sayıların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Örneğin 1176 tamsayısı $1176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir. Burada *teklikten* kasıt, 1176'nın her asal ayrışımının daima aynı asal çarpanlara (üç tane 2, bir tane 3 ve iki tane 7) sahip olmasıdır. Buna göre örneğin 1176 tamsayısının 5 çarpanına sahip hiçbir asal ayrışımı yoktur. Bir sayıyı asal çarpanlara ayırırken, o sayının farklı asal ayrışımlarının olmayacağı çok açıkmış gibi görünebilir. Oldukça önemli olan bu gözlemin ispatı çok da açık değildir. Yine de 1'den büyük her doğal sayının tek bir asal ayrışıma sahip olduğunu memnuniyetle kabul edebiliriz. (Bu konu Bölüm 10.3'de tekrar ele alınacaktır.)

Kabul edeceğimiz diğer tanım ve gözlemler yeri geldikçe verilecektir.

4.3 Doğrudan İspat Yöntemi

Bu bölümde, koşullu forma sahip teoremleri ve önermeleri ispatlamak için kullanılan ve **doğrudan ispat** olarak adlandırılan basit bir yöntemi inceleyeceğiz. Konuyu basit tutmak için ilk örneklerimiz, doğruluğu neredeyse açık olan önermelerden oluşmaktadır. Bu nedenle örnekleri, teorem yerine *önerme* olarak adlandıracağız. (Hatırlanacağı üzere önerme, doğru olan ancak bir teorem kadar kayda değer olmayan bir ifadedir.)

Doğrudan ispat yönteminin çalışma prensibini anlamak için aşağıdaki formda verilen bir önermeyi göz önüne alalım.

Önerme Eğer P ise Q.

Bu önerme, $P \Rightarrow Q$ formundaki koşullu bir önermedir. Amacımız bu koşullu önermenin doğru olduğunu göstermektir. Nasıl başlayacağımızı görmek için $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğruluk tablosuna bakalım:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
D	D	D
D	Y	**Y**
Y	D	D
Y	Y	D

Bu tablo, P yanlışken $P \Rightarrow Q$ önermesinin otomatik olarak doğru olduğunu gösterir. Bu nedenle $P \Rightarrow Q$ önermesini doğrularken P'nin yanlış olduğu durumlar göz ardı edilir çünkü (tablonun son iki satırına göre) böyle durumlarda $P \Rightarrow Q$ otomatik olarak doğrudur. Ancak (tablonun ilk iki satırında olduğu gibi) P doğruyken çok dikkatli olunmalıdır. P'nin doğru olmasının, Q'yu doğru olmak zorunda bırakacağı gösterilmelidir. Bunun anlamı, tablonun ikinci satırındaki senaryo ortaya çıkamaz.

Bu gözlem, $P \Rightarrow Q$ önermesinin ispatındaki ana hatları verir. İspata, P doğru kabul edilerek başlanır ve Q'nun doğru olması gerektiği gösterilir. (Hatırlanacağı üzere P'nin yanlış olduğu durumlar için endişe edilmez.)

Özet: Doğrudan İspat Yöntemi

Önerme Eğer P ise Q.

İspat. Kabul edelim ki P olsun.

$\vdots$

Bu nedenle Q doğrudur. ■

Doğrudan ispat yöntemindeki kurgu oldukça basittir. İspat *"Kabul edelim ki P olsun."* cümlesiyle başlar ve *"Bu nedenle Q doğrudur."* cümlesiyle biter. İlk ve son cümle arasında; mantık, tanımlar ve standart matematiksel gözlemler kullanılarak P önermesi Q önermesine dönüştürülür. Bir ispatın başlangıcını *"İspat"* kelimesiyle, sonunu ise ■ sembolüyle belirtmek oldukça yaygındır.

İlk örnek olarak, x tek ise x^2 tektir önermesini ispatlayalım. (Aslında bu çok da etkileyici bir sonuç değildir ancak zamanla daha belirgin sonuçlar ele alınacaktır.) İspatın ilk adımı, doğrudan ispat yönteminin özetinde verilen şablonu doldurmaktır. Bu iş, ana hatları çizilmiş olan bir resimi boyamaya benzer. İspatın ilk ve son satırları arasında biraz boşluk bırakılır. Kutulardan oluşan aşağıdaki zincir, bu boşluğun mantıksal muhakeme çerçevesinde nasıl doldurulacağını adım adım gösterir.

Önerme Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.

Bu nedenle x^2 tektir. ■

İspatın ilk ve son satırlarını yazmış olduk. Aradaki boşluğa, x tek olduğunda x^2 sayısının da tek olmasını gerektiren mantıksal sebepler yazılmalıdır.

Bu işi yaparken, konuyla ilgili tanımları kullanmak daima tavsiye edilir. İlk satır, x tamsayısının tek olduğunu söyler. Tanım 4.2 gereğince $x = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu bilgi ikinci satıra yazılabilir.

Önerme Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.
Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a+1$ *olacak şekilde bir* $a \in \mathbb{Z}$ *vardır.*

Bu nedenle x^2 tektir. ■

Şimdi, x^2 tektir diyen son satıra gidelim. Bu sonuca varmak için hemen üstteki satırın ne olması gerektiğini düşünelim. Tek sayı tanımı gereğince, bir $a \in \mathbb{Z}$ kullanılarak $x^2 = 2a+1$ formunda yazılmış olmalıdır. Ancak a harfi daha önce farklı bir amaç için kullanılmıştır. Bu nedenle farklı bir harf, örneğin b kullanılabilir.

Önerme Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.
Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

O hâlde $x^2 = 2b+1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.
Bu nedenle, *yine tek tamsayı tanımından*, x^2 tektir. ■

Neredeyse tamamladık. Aradaki boşluğu, aşağıdaki gibi doldurabiliriz.

Önerme Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.
Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
Buradan $x^2 = (2a+1)^2 = 4a^2+4a+1 = 2(2a^2+2a)+1$ bulunur.
Böylece $b = 2a^2+2a$ seçilerek $x^2 = 2b+1$ yazılabilir.
O hâlde $x^2 = 2b+1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.
Bu nedenle, *yine tek tamsayı tanımından*, x^2 tektir. ■

Son olarak, yaptığımız işi bir paragraf şeklinde yazabiliriz. Buna göre ispatın son hâli şu şekildedir.

Önerme Eğer x tek ise x^2 tektir.

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun. Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $x^2 = (2a+1)^2 = 4a^2+4a+1 = 2(2a^2+2a)+1$ bulunur. Böylece $b = 2a^2+2a$ seçilerek $x^2 = 2b+1$ yazılabilir. O hâlde $x^2 = 2b+1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu nedenle, yine tek tamsayı tanımından, x^2 tektir. ■

Bir ispata başlarken, yukarıda yaptığımız gibi ilk ve son satırları yazmak ve sonra yukarı ile aşağı arasında gidip gelerek ortada buluşuncaya dek aradaki boşluğu doldurmak genellikle iyi bir fikirdir. Bu işlem, ulaşmak istediğiniz en alttaki önermeyi akılda tutmanızı sağlar. Bazen gereğinden fazla, bazen yetersiz miktarda boşluk bırakabilirsiniz. Bazen de ne yapacağınızı bulmadan önce tıkanıp kalabilirsiniz. Bunların hepsi normaldir. Ressamların resimleri için başlangıçta kabataslak çizim yaptıkları gibi matematikçiler de ispatları için başlangıçta karalama yapar.

Şimdi başka bir örnek olarak aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.

Doğrudan ispat yöntemini ana hatlarıyla kullanalım. Bu prosedürü açıklamak için ispat aşamalarını yine adım adım yazalım.

Önerme Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.

Bu nedenle $a \mid c$ olur. ■

Başlangıç adımı olarak ilk satırda Tanım 4.4 kullanılabilir. Buna göre $a \mid b$ ifadesi, $b = ac$ olacak şekilde bir c tamsayısının var olması anlamına gelir. Ancak c harfi ilk satırda farklı bir anlamda kullanılmıştır. Bu nedenle başka bir harf, örneğin d kullanılabilir. Benzer şekilde $b \mid c$ için e kullanılabilir.

Önerme Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.
Tanım 4.4 gereğince, $a \mid b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir d tamsayısı vardır.
Benzer şekilde $b \mid c$ ise $c = be$ olacak şekilde bir e tamsayısı vardır.

Bu nedenle $a \mid c$ olur. ■

Aradaki boşluk neredeyse doldu. Sondan bir önceki satır $a \mid c$ olacağını göstermelidir. Tanım 4.4 uyarınca, bu satır $c = ax$ olacak şekilde bir x tamsayısının var olduğunu söylemelidir. Bu eşitlik, üst taraftaki satırlardan şu şekilde elde edilir.

Önerme Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.
Tanım 4.4 gereğince, $a \mid b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir d tamsayısı vardır.
Benzer şekilde $b \mid c$ ise $c = be$ olacak şekilde bir e tamsayısı vardır.
Buna göre $c = be = (ad)e = a(de)$ olur ve $x = de$ seçilerek $c = ax$ yazılabilir.
Bu nedenle $a \mid c$ olur. ■

Sırada, ispatın tüm aşamalarını tek seferde gösteren bir örnek verelim.

Önerme Eğer x çift ise $x^2 - 6x + 5$ tektir.

İspat. Kabul edelim ki x çift olsun.
Çift sayı tanımına göre $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

Buradan $x^2-6x+5=(2a)^2-6(2a)+5=4a^2-12a+4+1=2(2a^2-6a+2)+1$ bulunur.
Buna göre $b=2a^2-6a+2 \in \mathbb{Z}$ seçilerek $x^2-6x+5=2b+1$ yazılabilir.
Sonuç olarak, tek sayı tanımı gereğince x^2-6x+5 tektir. ■

Normalde bir ispatın her cümlesi için ayrı bir satır kullanılmaz fakat anlaşılabilirlik açısından bunu ilk birkaç ünitede sıklıkla yapacağız.

Şimdi, iki niceliğin eşit olduğunu göstermek için kullanılan standart yönteme dair bir örnek verelim. Eğer $m \le n$ ve $n \le m$ olduğu gösterilebilirse $m=n$ olmak zorundadır. Genel olarak $m \le n$ ifadesini göstermek için kullanılan sebep, $n \le m$ için kullanılan sebepten oldukça farklı olabilir.

Tanım 4.6'da verilen en küçük ortak kat kavramını hatırlayınız (s. 116).

Önerme Eğer $a,b,c \in \mathbb{N}$ ise $\text{ekok}(ca,cb)=c\cdot\text{ekok}(a,b)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $a,b,c \in \mathbb{N}$; $m=\text{ekok}(ca,cb)$ ve $n=c\cdot\text{ekok}(a,b)$ olsun. Buna göre $m=n$ olduğunu gösterelim. Tanımı gereği $\text{ekok}(a,b)$ değeri, a ve b sayılarının pozitif katlarıdır. Buna göre $\text{ekok}(a,b)=ax=by$ olacak şekilde $x,y \in \mathbb{N}$ vardır. O hâlde $n=c\cdot\text{ekok}(a,b)=cax=cby$ tamsayısı hem ca hem de cb sayısının pozitif bir katıdır. Ama $m=\text{ekok}(ca,cb)$ sayısı ca ile cb sayılarının ortak katlarının *en küçüğüdür*. Böylece $m \le n$ olmalıdır.

Öte yandan $m=\text{ekok}(ca,cb)$ sayısı ca ve cb sayılarının bir katıdır. O hâlde $m=cax=cby$ olacak şekilde $x,y \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $\frac{1}{c}m=ax=by$ sayısı a ve b sayılarının bir katıdır. Bundan dolayı $\text{ekok}(a,b) \le \frac{1}{c}m$ yani $c\cdot\text{ekok}(a,b) \le m$ bulunur. Buradan $n \le m$ elde edilir.

Sonuç olarak $m \le n$ ve $n \le m$ olduğunu gösterdik. Buna göre $m=n$ olur ve ispat tamamlanır. ■

Şu ana kadar sadece tamsayılar hakkındaki önermelerin ispatlarıyla ilgilendik. Bir sonraki örnekte, x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere $x \le y$ ise $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ olduğunu gösterelim. Bunun için yapacağımız ispatın öncekiler kadar "otomatik" olmadığını hissedebilirsiniz. İspatta atılması gereken doğru adımları bulmak zor olabilir ancak işin eğlenceli tarafı tam da budur.

Önerme Eğer x ile y pozitif reel sayılar ve $x \le y$ ise $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $x \le y$ olsun.
Eşitsizliğin her iki tarafından y çıkarılarak $x-y \le 0$ bulunur.
Buradan $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2 \le 0$ yazılabilir.
Bu ifade çarpanlarına ayrılarak $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \le 0$ elde edilir.
Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ile bölünerek $\sqrt{x}-\sqrt{y} \le 0$ bulunur.
Son eşitsizliğin her iki tarafına $\sqrt{y}$ eklenerek $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ elde edilir. ■

Bu önerme $x \le y$ olduğunda, her iki tarafın karekökünü alarak $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$ yazabileceğimizi garanti eder. Bir sonraki önermede göreceğimiz üzere bu bilgi yararlı olabilir.

Şimdi, $2\sqrt{xy} \le x + y$ ifadesini göz önüne alalım. Dikkat edilirse x ve y yerine yazılan rastgele pozitif sayılar için bu eşitsizlik doğrudur. Örneğin $x = 6$ ve $y = 4$ ise eşitsizliğin sol tarafı $2\sqrt{6 \cdot 4} = 4\sqrt{6} \approx 9,79$ olur. Bu sayı, eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen $6 + 4 = 10$ sayısından küçüktür. Buna göre pozitif olan her x ve y değeri için $2\sqrt{xy} \le x + y$ ifadesi doğru mudur? Eğer doğru ise bu nasıl ispatlanabilir?

Bunu görmek için verilen ifadeyi koşullu bir önerme formunda yazalım: Eğer x ve y pozitif reel sayılar ise $2\sqrt{xy} \le x + y$ olur. İspat, x ile y sayılarını pozitif kabul ederek başlamalı ve $2\sqrt{xy} \le x+y$ ifadesi ile bitmelidir. İspat için bir plan tasarlarken, $2\sqrt{xy} \le x + y$ ile başlayıp sondan başa doğru hareket etmek faydalı olabilir. Daha sonra adımlar tersine çevrilebilir. Bu amaç doğrultusunda $2\sqrt{xy} \le x + y$ eşitsizliğinde her iki tarafın karesini alalım:

$$4xy \le x^2 + 2xy + y^2.$$

Şimdi, bu eşitsizliğin her iki tarafından $4xy$ çıkarıp çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{aligned} 0 &\le x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &\le (x - y)^2. \end{aligned}$$

Dikkat edilirse $x - y$ sayısının karesi negatif olamaz. Buna göre son satırın doğru olduğu açıktır! Bu bilgi, ispatı aşağıdaki gibi yapmamızı sağlar.

Önerme Eğer x ve y herhangi iki pozitif reel sayı ise $2\sqrt{xy} \le x + y$ olur.

İspat. Kabul edelim ki x ve y pozitif reel sayılar olsun.
Buna göre $0 \le (x - y)^2$ yani $0 \le x^2 - 2xy + y^2$ yazılabilir.
Bu eşitsizliğin her iki tarafına $4xy$ eklenerek $4xy \le x^2 + 2xy + y^2$ elde edilir.
Buradan $4xy \le (x + y)^2$ bulunur.
Bir eşitsizlikte her iki tarafın karekökünü almak o eşitsizliği bozmaz.
Buna göre $2\sqrt{xy} \le x + y$ elde edilir. ■

İspatın son satırında, $4xy \le (x + y)^2$ eşisizliğinin her iki tarafının karekökü alınarak $\sqrt{4xy} \le \sqrt{(x + y)^2}$ elde edilmiştir. Buradaki $\le$ sembolü, önceki önermenin bir sonucu olarak yön değiştirmemiştir. Bu önemli bir noktadır. Genellikle bir önermenin veya teoreminin ispatında (daha önce ispatlanmış) başka bir önerme veya teorem kullanılır.

4.4 Durum İncelemeli İspat

Bir ispatı yaparken, önermenin olması ihtimal dahilinde olan her senaryoda doğru olduğunu göstermek için birden çok durumun incelenmesi gerekebilir. Şimdi bu türdeki birkaç problemi inceleyelim.

Örnek olarak $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesini ele alalım. Aşağıdaki tablo, n tamsayısının çeşitli değerlerine karşılık bu ifadenin aldığı değerleri listeler. Dikkat edileceği üzere $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi her satırda 4'ün bir katıdır.

n	$1+(-1)^n(2n-1)$
1	0
2	4
3	−4
4	8
5	−8
6	12

Burada akla şu soru gelir: $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi her zaman 4'ün bir katı mıdır? Bir sonraki örnek, cevabın "evet" olduğunu gösterir. Dikkat edilirse n tamsayısının tek veya çift olmasına göre $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi farklı davranır. Bu durum, n tekse $(-1)^n = -1$ ve n çiftse $(-1)^n = 1$ olmasından kaynaklanır. Bu nedenle ispatta bu iki durum ayrı ayrı incelenmelidir.

Önerme Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi 4'ün bir katıdır.

İspat. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ olsun.
Buna göre n ya tektir ya da çifttir. Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

1. Durum Kabul edelim ki n çift olsun.
Bu durumda $n = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır ve $(-1)^n = 1$ olur.
Buna göre $1+(-1)^n(2n-1) = 1+(1)(2\cdot 2k-1) = 4k$ sayısı 4'ün bir katıdır.

2. Durum Kabul edelim ki n tek olsun.
Bu durumda $n = 2k+1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır ve $(-1)^n = -1$ olur.
Buna göre $1+(-1)^n(2n-1) = 1-(2\cdot(2k+1)-1) = -4k$ sayısı 4'ün bir katıdır.

Her iki durum da $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi daima 4'ün bir katıdır. ■

Şimdi soruyu tersten soralım: $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesi daima 4'ün bir katıdır ancak 4'ün *her* katı bu şekilde yazılabilir mi? Aşağıdaki önerme ve ispatı, bu soruya olumlu cevap verir.

Önerme 4 tamsayısının herhangi katını $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesine eşit yapacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. Bu önermeyi koşullu formda yazalım:
Eğer k tamsayısı 4'ün katı ise $1+(-1)^n(2n-1) = k$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.
Şimdi bu koşullu önermeyi ispatlayalım.
Kabul edelim ki k tamsayısı 4'ün bir katı olsun.
Bu durumda $k = 4a$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır.
O hâlde $1+(-1)^n(2n-1) = k$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ üretilmelidir.
Bu işi a tamsayısının sıfır, pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak yapalım:

1. Durum Kabul edelim ki $a = 0$ olsun.
Eğer $n = 1$ seçilirse $1+(-1)^n(2n-1) = 1+(-1)^1(2-1) = 0 = 4\cdot 0 = 4a = k$ olur.

2. Durum Kabul edelim ki $a > 0$ olsun.
Eğer $n = 2a$ seçilirse n çift bir doğal sayı olacağı için $(-1)^n = 1$ olur.
Buna göre $1+(-1)^n(2n-1) = 1+(2n-1) = 2n = 2(2a) = 4a = k$ bulunur.

3. Durum Kabul edelim ki $a < 0$ olsun.
Eğer $n = 1-2a$ seçilirse a negatif olduğu için n pozitif bir doğal sayıdır.
Ayrıca n tek olduğu için $(-1)^n = -1$ olur.
Buna göre $1+(-1)^n(2n-1) = 1-(2n-1) = 1-(2(1-2a)-1) = 4a = k$ bulunur.

Böylelikle $k = 4a$ tamsayısı; 4'ün sıfır, pozitif veya negatif hangi katı olursa olsun $k = 1+(-1)^n(2n-1)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ daima vardır. ■

4.5 Benzer Durumlar

Bazı ispatlarda, iki veya daha fazla durum birbirine çok benzer olabilir. Bunlar için ayrı ayrı ispat yazmak hem sıkıcıdır hem de gereksizdir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Önerme Eğer iki tane tamsayı karşıt pariteli ise bunların toplamı tektir.

İspat. Kabul edelim ki m ve n karşıt pariteye sahip iki tamsayı olsun.
Bu durumda $m+n$ tamsayısının tek olduğu gösterilmelidir.
Bu iş, aşağıdaki gibi iki farklı durum incelenerek yapılabilir.

1. Durum Kabul edelim ki m çift ve n tek olsun.
Bu durumda $m = 2a$ ve $n = 2b+1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.
Buna göre $m+n = 2a+2b+1 = 2(a+b)+1$ sayısı tektir (Tanım 4.2).

2. Durum Kabul edelim ki m tek ve n çift olsun.
Bu durumda $m = 2a+1$ ve $n = 2b$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.
Buna göre $m+n = 2a+1+2b = 2(a+b)+1$ sayısı tektir (Tanım 4.2).

Her iki durumda da $m+n$ tektir. ■

Yukarıdaki iki durum, çift ve tek sayıların sıralaması dışında tamamen aynıdır. Bu nedenle sadece bir durumun ispatını vermek ve diğerinin de neredeyse aynı olduğunu belirtmek, yerinde bir yaklaşımdır. Bunun için *"Genelliği bozmadan ..."* veya *"Genellik kaybı olmaksızın ..."* ifadelerinden biri kullanılabilir. Yukarıdaki ispatın ikinci bir versiyonu şu şekildedir.

Önerme Eğer iki tane tamsayı karşıt pariteli ise bunların toplamı tektir.

İspat. Kabul edelim ki m ve n karşıt pariteye sahip iki tamsayı olsun.
Bu durumda $m+n$ tamsayısının tek olduğu gösterilmelidir.
Genelliği bozmadan, m çift ve n tek olsun.
Bu durumda $m=2a$ ve $n=2b+1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.
Buna göre $m+n=2a+2b+1=2(a+b)+1$ sayısı tektir (Tanım 4.2). ■

Diğer ders kitaplarındaki ispatları okurken, bazı ifadelerin kısaltılarak kullanıldığını görebilirsiniz. Şeffaflık açısından biz bu tür kısaltmalardan kaçınacağız. Bu anlayış doğrultusunda, en azından ispatları yazma konusunda daha tecrübeli hâle gelene kadar, bazı durumlar çok kadar benzer olsa da onların ispatlarını ayrı ayrı yazmanız tavsiye edilebilir.

Aşağıdaki alıştırmaları çözerek konuyu ne kadar kavradığınızı kontrol edebilirsiniz. Tek numaralı problemlerin ispatlarını, kitabın sonundaki Çözümler ünitesinde bulabilirsiniz.

Ünite 4 Alıştırmaları

Doğrudan ispat yöntemini kullanarak aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

1. Eğer x çift ise x^2 çifttir.
2. Eğer x tek ise x^3 tektir.
3. Eğer a tek ise a^2+3a+5 tektir.
4. Kabul edelim ki $x,y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x ve y tek ise xy tektir.
5. Kabul edelim ki $x,y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x çift ise xy çifttir.
6. Kabul edelim ki $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid (b+c)$ olur.
7. Kabul edelim ki $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ise $a^2 \mid b^2$ olur.
8. Kabul edelim ki a bir tamsayı olsun. Eğer $5 \mid 2a$ ise $5 \mid a$ olur.
9. Kabul edelim ki a bir tamsayı olsun. Eğer $7 \mid 4a$ ise $7 \mid a$ olur.
10. Kabul edelim ki $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ise $a \mid (3b^3-b^2+5b)$ olur.
11. Kabul edelim ki $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise $ac \mid bd$ olur.
12. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ve $0<x<4$ ise $\frac{4}{x(x-4)} \geq 1$ olur.
13. Kabul edelim ki $x,y \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^2+5y=y^2+5x$ ise $x=y$ veya $x+y=5$ olmalıdır.
14. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $5n^2+3n+7$ tek sayıdır. (Durum incelemesi yapınız.)

15. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise n^2+3n+4 çift sayıdır. (Durum incelemesi yapınız.)

16. Eğer iki tamsayı aynı pariteli ise toplamları çifttir. (Durum incelemesi yapınız.)

17. Eğer iki tamsayı karşıt pariteli ise bunların çarpımları çifttir.

18. Kabul edelim ki x ve y pozitif tamsayılar olsun. Eğer $x<y$ ise $x^2<y^2$ olur.

19. Kabul edelim ki a, b ve c tamsayılar olsun. Eğer $a^2 \mid b$ ve $b^3 \mid c$ ise $a^6 \mid c$ olur.

20. Eğer a bir tamsayı ve $a^2 \mid a$ ise $a \in \{-1,0,1\}$ olur.

21. Kabul edelim ki p asal olsun. Eğer $k \in \mathbb{Z}$ ve $0<k<p$ ise p asalı $\binom{p}{k}$ sayısını böler.

22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $n^2 = 2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$ olur. (Burada, $n=1$ durumu ayrı incelenmelidir.)

23. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\binom{2n}{n}$ çifttir.

24. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ ise $n!+2,\ n!+3,\ n!+4,\ n!+5,\ldots,n!+n$ sayılarının hepsi bileşiktir. (Bu nedenle her $n \geq 2$ için $n-1$ tane ardışık bileşik sayı bulunabilir. Bunun anlamı şudur: Asal sayılar arasında keyfi büyüklükte "boşluklar" olabilir.)

25. Eğer $a,b,c \in \mathbb{N}$ ve $c \leq b \leq a$ ise $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}$ olur.

26. Her tek tamsayı, iki kare farkı olarak yazılabilir. (Örneğin $7 = 4^2-3^2$ vb.)

27. Kabul edelim ki $a,b \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $\text{ebob}(a,b)>1$ ise b asal değildir veya $b \mid a$ olur.

28. Kabul edelim ki $a,b,c \in \mathbb{Z}$ olsun. Ayrıca a ve b tamsayılarının ikisi birden sıfır olmasın ve $c \neq 0$ olsun. Buna göre $c \cdot \text{ebob}(a,b) \leq \text{ebob}(ca,cb)$ olduğunu ispatlayınız.

ÜNİTE 5

Dolaylı İspat

Bu ünitede, doğrudan ispat yöntemine bir alternatif olan **dolaylı ispat** yöntemini inceleyeceğiz. Doğrudan ispatta olduğu gibi dolaylı ispat yöntemi de *"Eğer P ise Q."* formundaki koşullu önermeleri ispatlamak için kullanılır. Bu önermeler için doğrudan ispat yöntemi kullanılabilir olsa da dolaylı ispat yöntemini kullanmak bazen çok daha kolaydır.

5.1 Dolaylı İspat Yöntemi

Dolaylı ispat yönteminin çalışma prensibini anlamak için aşağıdaki formda verilen bir önermeyi ispatlamak istediğimizi düşünelim.

Önerme Eğer P ise Q.

Bu önerme, $P \Rightarrow Q$ formundaki koşullu bir önermedir. Amacımız bu önermenin doğru olduğunu göstermektir. Bölüm 2.6'dan hatırlanacağı üzere $P \Rightarrow Q$ ve $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermeleri mantıksal olarak denktir. Bunu görmek için doğruluk tablosunu tekrardan yazalım:

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$
D	D	Y	Y	**D**	**D**
D	Y	D	Y	**Y**	**Y**
Y	D	Y	D	**D**	**D**
Y	Y	D	D	**D**	**D**

Bu tabloya göre $P \Rightarrow Q$ ve $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermeleri aynı şeyi farklı şekilde ifade etme yollarıdır. Buradaki $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesine $P \Rightarrow Q$ önermesinin **karşıt tersi** denir. (*Karşıt* ile *karşıt ters* kavramları karıştırılmamalıdır. Bölüm 2.4'ten hatırlanacağı üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin *karşıtı* $Q \Rightarrow P$ önermesidir. Ancak $P \Rightarrow Q$ ile $Q \Rightarrow P$ mantıksal olarak denk *değildir*.)

Sonuç olarak $P \Rightarrow Q$ ve $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermeleri mantıksal olarak denktir. Bu nedenle $P \Rightarrow Q$ önermesini doğrulamak için bunun yerine $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesini ispatlamak yeterlidir. Eğer $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesini doğrudan ispat yöntemiyle göstermek istersek $\sim Q$ önermesini doğru kabul eder ve $\sim P$ önermesinin doğru olduğu sonucuna ulaşırız. Aslında dolaylı ispat yöntemininindeki temel yaklaşım budur. Şimdi bunu özetleyelim.

Özet: Dolaylı İspat Yöntemi

Önerme Eğer P ise Q.
İspat. Kabul edelim ki $\sim Q$ olsun.
$\vdots$
Bu nedenle $\sim P$ olur. ■

Dolaylı ispat yöntemindeki kurgu oldukça basittir. İspat *"Kabul edelim ki Q doğru olmasın."* ya da buna denk olan bir cümle ile başlar ve *"Bu nedenle P yanlıştır."* cümlesi ile biter. Bu iki cümle arasında, mantık çerçevesinde tanımlar kullanılarak $\sim Q$ önermesi $\sim P$ önermesine dönüştürülür.

Dolaylı ispat yöntemini göstermek ve onu doğrudan ispat yöntemi ile karşılaştırmak için aşağıdaki önermeyi iki farklı şekilde ispatlayalım. İlk önce doğrudan ispat, sonra da dolaylı ispat yöntemini kullanalım.

Önerme Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $7x+9$ çift ise x tektir.

İspat. (Doğrudan ispat) Kabul edelim ki $7x+9$ çift olsun.
Bu durumda $7x+9 = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
Eştiliğin her iki tarafından $6x+9$ çıkarılarak $x = 2a-6x-9$ bulunur.
Buradan $x = 2a-6x-9 = 2a-6x-10+1 = 2(a-3x-5)+1$ yazılabilir.
Buna göre $b = a-3x-5$ seçilerek $a = 2b+1$ elde edilir.
Sonuç olarak x tektir. ■

Şimdi aynı önermeyi dolaylı ispat yöntemiyle ispatlayalım.

Önerme Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $7x+9$ çift ise x tektir.

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki x tek olmasın.
Bu durumda x çifttir ve $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
Buradan $7x+9 = 7(2a)+9 = 14a+8+1 = 2(7a+4)+1$ yazılabilir.
Buna göre $b = 7a+4$ seçilerek $7x+9 = 2b+1$ elde edilir.
O hâlde $7x+9$ tektir.
Sonuç olarak $7x+9$ çift değildir. ■

Her iki ispat yöntemi de aynı uzunluktadır. Ancak dolaylı ispat yönteminin daha akıcı olduğunu hissetmiş olabilirsiniz. Bunun sebebi, x hakkında verilen bilgiden $7x+9$ hakkında bilgi elde etmek, bunun tersini yapmaktan daha kolaydır. Şimdi yine bir x tamsayısı ile ilgili başka bir örnek verelim.

Önerme Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer x^2-6x+5 çift ise x tektir.

Bunu doğrudan ispatlamak biraz sıkıntılıdır. Çünkü x^2-6x+5 sayısını çift kabul edip başlarsak $x^2-6x+5=2a$ yazabiliriz. Bu ifadeyi, bir $b \in \mathbb{Z}$ aracılığı ile $x=2b+1$ formuna dönüştürmek gerekir. Kudaratik denklemdeki x bilinmeyenini yalnız bırakmayı gerektiren bu işin nasıl yapılacağı çok da açık değildir. Ancak ispatı dolaylı yoldan yapmak oldukça kolaydır.

Önerme Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer x^2-6x+5 çift ise x tektir.

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki x tek olmasın.
Bu durumda x çifttir yani $x=2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
Buna göre $x^2-6x+5=(2a)^2-6(2a)+5=4a^2-12a+4+1=2(2a^2-6a+2)+1$ olur.
Eğer $b=2a^2-6a+2$ seçilirse $x^2-6x+5=2b+1$ yazılabilir.
O hâlde x^2-6x+5 tektir.
Sonuç olarak x^2-6x+5 çift değildir. ■

Özetlersek; x tamsayısının tek olmaması $(\sim Q)$, x^2-6x+5 tamsayısının çift olmamasını $(\sim P)$ gerektirir. O hâlde x^2-6x+5 tamsayısının çift olması (P), x tamsayısının tek olması (Q) anlamına gelir. Böylece $\sim Q \Rightarrow \sim P$ ispatlanarak $P \Rightarrow Q$ kanıtlanmış olur. Şimdi başka bir örnek daha verelim.

Önerme Herhangi iki $x, y \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $y^3+yx^2 \le x^3+xy^2$ ise $y \le x$ olur.

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki $y \le x$ ifadesi yanlış olsun.
Bu durumda $y > x$ yani $y-x>0$ olmalıdır.
Bu eşitsizliğin her iki tarafını pozitif x^2+y^2 sayısı ile çarpalım:

$$\begin{aligned} (y-x)(x^2+y^2) &> 0(x^2+y^2) \\ yx^2+y^3-x^3-xy^2 &> 0 \\ yx^2+y^3 &> x^3+xy^2 \end{aligned}$$

Böylelikle $yx^2+y^3>x^3+xy^2$ olur.
Sonuç olarak $yx^2+y^3 \le x^3+xy^2$ ifadesi doğru olamaz. ■

"Eğer P ise Q." önermesinin dolaylı yoldan ispatı, $\sim P$ ve $\sim Q$ olumsuz önermelerini içerir. Önermeleri olumsuzlaştırmak için Bölüm 2.10'da verilen yöntemler (örneğin DeMorgan kuralları vb.) kullanılabilir. Şimdi bunu bir örnek ile inceleyelim.

Önerme 5.1 Herhangi iki $x, y \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $5 \nmid xy$ ise $5 \nmid x$ ve $5 \nmid y$ olur.

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki "$5 \nmid x$ **ve** $5 \nmid y$" ifadesi doğru olmasın. DeMorgan kurallarından, $5 \nmid x$ doğru değildir **veya** $5 \nmid y$ doğru değildir. Buna göre $5 \mid x$ veya $5 \mid y$ olmalıdır. Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim:

1. Durum Kabul edelim ki $5 \mid x$ olsun. Buna göre $x = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $xy = 5(ay)$ bulunur. Bu eşitlik $5 \mid xy$ anlamına gelir.

2. Durum Kabul edelim ki $5 \mid y$ olsun. Buna göre $y = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $xy = 5(ax)$ bulunur. Bu eşitlik $5 \mid xy$ anlamına gelir.

Her iki durum da $5 \mid xy$ olduğu için $5 \nmid xy$ ifadesi doğru değildir. ■

5.2 Tamsayılarda Denklik

Şimdi, matematiğin birçok alanında karşımıza çıkan bir tanım verme vakti geldi. İleride alacağınız derslerde de önemli bir rol oynayacak olan bu tanımı burada vermemizin asıl sebebi, doğrudan ve dolaylı ispatların yazımında bize daha çok pratik kazandıracak olmasıdır.

Tanım 5.1 Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $n \mid (a-b)$ ise a ile b tamsayıları ***n* modülüne göre denktir** denir ve $a \equiv b \pmod{n}$ yazılır. Eğer a ve b tamsayıları n modülüne göre denk değilse $a \not\equiv b \pmod{n}$ yazılır.

Örnek 5.1 Aşağıda bazı örnekler verilmiştir:

1. $9 \equiv 1 \pmod{4}$ çünkü $4 \mid (9-1)$.
2. $6 \equiv 10 \pmod{4}$ çünkü $4 \mid (6-10)$.
3. $14 \not\equiv 8 \pmod{4}$ çünkü $4 \nmid (14-8)$.
4. $20 \equiv 4 \pmod{8}$ çünkü $8 \mid (20-4)$.
5. $17 \equiv -4 \pmod{3}$ çünkü $3 \mid (17-(-4))$.

Pratik olarak $a \equiv b \pmod{n}$ ifadesi, a ve b tamsayılarının n ile bölümünden kalan sayıların eşit olması anlamına gelir. Örneğin, yukarıda $6 \equiv 10 \pmod{4}$ yazılmıştır. Gerçekten de 6 ve 10 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden 2 kalır. Ayrıca 14 ve 8 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden sırası ile 2 ve 0 kaldığı için $14 \not\equiv 8 \pmod{4}$ yazılmıştır.

Şimdi bunun daima olduğunu gösterelim. Eğer a ve b tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan r ise $a = kn + r$ ve $b = ln + r$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $a - b = (kn+r)-(ln+r) = n(k-l)$ yazılabilir. Dikkat edilirse $(a-b) = n(k-l)$ olması $n \mid (a-b)$ anlamına gelir. Buradan $a \equiv b \pmod{n}$ bulunur. Alıştırma 32'de bunun tersi yani $a \equiv b \pmod{n}$ iken a ve b tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan sayıların eşit olduklarını göstermeniz istenecektir.

Bu bölümü, tamsayıların denkliğini içeren birkaç ispat ile bitirelim. Alıştırmalar kısmındaki ispatlar ile kendi yeteneklerinizi test edebilirsiniz.

Önerme Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ olur.

İspat. Doğrudan ispat yapalım. Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod{n}$ olsun.
Tamsayılardaki denklik tanımından $n \mid (a-b)$ yazılabilir.
Bölme işlemini tanımına göre $a-b = nc$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
Şimdi bu denklemin her iki tarafını $a+b$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned} a-b &= nc \\ (a-b)(a+b) &= nc(a+b) \\ a^2-b^2 &= nc(a+b) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte $c(a+b) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n \mid (a^2-b^2)$ yazılabilir.
Tanım 5.1'e göre $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ elde edilir. ■

Şimdi biraz ara verelim ve yukarıdaki önermenin ne anlama geldiğini düşünelim. Bu önerme, $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ olduğunu söyler. Bir başka deyişle, a ve b tamsayılarının n ile bölümünden kalan sayılar eşit ise a^2 ve b^2 tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan sayılar da eşittir. Örneğin, 6 ve 10 tamsayılarının 4 ile bölümünden kalan sayılar eşittir (2). Bunların kareleri olan 36 ve 100 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden kalan sayılar da eşittir (0). Bu önerme; her a, b ve n için bu gözlemin doğru olacağını garanti eder. Örneklerimizde, önermelerin anlamlarından ziyade onların nasıl ispatlandığına odaklanacağız. Ana hedefimiz ispatların nasıl yapıldığını öğrenmek olduğu için bunu yapmak makul bir davranıştır. Ancak bazen ispatladığımız şeyin ne anlama geldiğini düşünmekte de yarar vardır.

Önerme Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $ac \equiv bc \pmod{n}$ olur.

İspat. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod{n}$ olsun. Tanım 5.1'den $n \mid (a-b)$ yazılabilir. Bölünebilme tanımı gereğince $a-b = nk$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı c ile çarpılarak $ac-bc = nkc$ elde edilir. Burada $kc \in \mathbb{Z}$ ve $ac-bc = n(kc)$ olduğu için $n \mid (ac-bc)$ yazılabilir. Tanım 5.1'den $ac \equiv bc \pmod{n}$ bulunur. ■

Bir sonraki örnekte kullanılacak en iyi yöntem dolaylı ispat yöntemi gibi görünmektedir çünkü bu yöntem $\nmid$ ve $\not\equiv$ sembollerini kullanmaz.

Önerme 5.2 Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $12a \not\equiv 12b \pmod{n}$ ise $n \nmid 12$ olur.

İspat. (Dolaylı ispat). Kabul edelim ki $n \mid 12$ olsun. Bu durumda $12 = nc$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} 12(a-b) &= nc(a-b) \\ 12a - 12b &= n(ca - cb) \end{aligned}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse $ca - cb \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n \mid (12a - 12b)$ bulunur. Bu da $12a \equiv 12b \pmod{n}$ anlamına gelir. ■

5.3 Matematiksel Yazım

Artık ispatları yazmaya başladığımıza göre yazı yazma sanatı üzerine birkaç söz etmek için iyi bir noktadayız. Mantıkta ve matematikte, doğru ile yanlış arasında kesin bir çizgi vardır. Bunun aksine iyi ve kötü yazı arasındaki fark bir görüş meselesidir. Ancak yazdıklarınızı daha anlaşılabilir hale getirecek bazı standart kurallar vardır. Şimdi bunlardan bazılarını listeleyelim.

1. **Cümlelere matematiksel semboller yerine kelimelerle başlayın.**[1] Bunun sebebi, cümleler büyük harflerle başlar fakat matematiksel semboller büyük ve küçük harflere karşı duyarlıdır. Örneğin, x ve X sembolleri tamamen farklı anlamlar taşıyabilir. Bunları bir cümlenin başında kullanmak karmaşaya sebep olabilir. Aşağıda ($\times$ ile işaretlenmiş) kötü kullanım ve ($\checkmark$ ile işaretlenmiş) iyi kullanım örnekleri verilmiştir:

   $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. $\times$
   $X^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. $\times$ (ayrıca anlamsızdır)
   İkinci dereceden $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. $\checkmark$

2. Matematiksel bir sembol veya ifade ile bitse bile **her cümleyi nokta ile bitirin.**

   Euler şu formülü ispatlamıştır: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ $\times$
   Euler şu formülü ispatlamıştır: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$ $\checkmark$

   Matematiksel önermeler (denklemler vs.) özel semboller içeren cümlelerdir. Bu nedenle doğal noktalama işaretleri kullanılmalıdır.

3. **Matematiksel sembolleri ve ifadeleri kelimeler ile birbirinden ayırın.** Aksi hâlde, farklı ifadeler birleşip tek bir ifade gibi görünebilir. Aşağıdaki örnekleri anlaşılırlık açısından karşılaştırın.

[1] Bu kural, İngilizce için geçerlidir. Türkçede bunu yapmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu cümlenin başına "mümkün oldukça" ifadesinin getirilmesi daha uygun olacaktır.

$x^2 - 1 = 0$, $x = 1$ veya $x = -1$ olur. ×
$x^2 - 1 = 0$ olur ve buradan $x = 1$ veya $x = -1$ bulunur. ✓

Boş olan $A \cap B$, $A \cup B$ kümesinden farklıdır. ×
Boş olan $A \cap B$ kümesi, $A \cup B$ kümesinden farklıdır. ✓

4. **Sembollerin yanlış kullanımından kaçının.** Örneğin $=$, $\leq$, $\subseteq$, $\in$ ve benzeri semboller birer kelime değildir. Bunları matematiksel ifadeler için kullanmak uygun olsa da farklı bağlamda kullanmak yersizdir.

   Bu iki küme = olduğu için biri diğerinin altkümesidir. ×
   Bu iki küme eşit olduğu için biri diğerinin altkümesidir. ✓

   Boş küme her kümenin bir $\subseteq$'sidir. ×
   Boş küme her kümenin bir altkümesidir. ✓

   a tektir ve x tek $\Rightarrow x^2$ de tek olduğu için a^2 tektir. ×
   a tektir ve her tek sayının karesi de tek olduğu için a^2 tektir. ✓

5. **Gereksiz sembol kullanmaktan kaçının.** Matematik zaten yeterince karmaşıktır. Çamurlu suyu daha fazla bulandırmanın bir anlamı yoktur.

   Kardinalitesi negatif olan bir X kümesi yoktur. ×
   Kardinalitesi negatif olan bir küme yoktur. ✓

6. **Birinci çoğul şahıs kullanın.** Matematiksel metinlerde "ben" ve "sen" yerine "biz" kelimesini kullanmak daha yaygındır. Bu sanki aynı ortamda bulunan yazarın, okuyucuya ispatın detaylarını anlatmasına benzer.

7. **Aktif cümleler kullanın.** Bu sadece bir öneridir ancak aktif cümleler yazınızı daha canlı (ve daha kısa) bir hale getirir.

   $x = 3$ değeri, her iki tarafın 5 ile bölünmesinden elde edilmiştir. ×
   Her iki tarafı 5 ile bölerek $x = 3$ buluruz. ✓

8. **Kullandığınız her yeni sembolü açıklayın.** Bir ispatı yazarken, kullandığınız her yeni sembolün anlamını açıklamalısınız. Bunun yapılmaması; belirsizliğe, yanlış anlamaya ve hatalara yol açabilir. Örneğin, bir önceki satırda a ve b tanıtılmış olsun. İspatta kullanılabilecek bir cümlenin olası iki hâline göz atalım.

   $a \mid b$ olduğu için $b = ac$ olur. ×
   $a \mid b$ olduğu için $b = ac$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır. ✓

9. **"Bu" kelimesinin kullanımına dikkat edin.** Neyi kastettiği belli olmayan "bu" işaret zamiri, bir karışıklığa neden olabilir. Böyle durumlarda "bu" kelimesini kullanmaktan kaçınmak gerekir. İşte bir örnek:

   $X \subseteq Y$ ve $0 < |X|$ olduğu için bu küme boştan farklıdır. $\times$

   Yukarıdaki "bu" kelimesinden kasıt X midir yoksa Y midir? Aslında ikisi için de kullanılılabilir fakat bizim hangisini kastettiğimiz belli değildir.

   $X \subseteq Y$ ve $0 < |X|$ olduğu için Y kümesi boştan farklıdır. $\checkmark$

10. **Çünkü, -den dolayı, olduğu için.** İki önermeyi birleştirmek için bu kelimeler birer bağlaç olarak kullanılır. Bunlar, bir önermenin doğru olduğunu ve bunun sonucu olarak diğerinin de doğru olduğunu ifade eder. Aşağıdakilerin hepsi, P'nin doğru olduğu (veya doğru kabul edildiğini) ve bunun bir sonucu olarak Q'nun da doğru olduğu anlamına gelir.

    Q çünkü P $\qquad$ P'den dolayı Q $\qquad$ P olduğu için Q

    Bu yapılar anlam bakımından *"Eğer P ise Q."* önermesinden farklıdır çünkü bunlar P'nin Q'yu gerektirmesine **ek** olarak P'nin doğru olduğunu söyler. Bunlar dikkatli bir şekilde kullanılmalıdır. Burada P ve Q iki önermedir **ve** gerçekten de Q önermesi P'den dolayı doğrudur.

    $x \in \mathbb{N}$ olduğu için $\mathbb{Z}$ $\times$
    $x \in \mathbb{N}$ olduğu için $x \in \mathbb{Z}$ $\checkmark$

11. **Bu nedenle, buna göre, böylece, bundan dolayı, bunun sonucu olarak.** Bir önerme öncesinde kullanılan bu zarflar o önermenin mantıksal olarak önceki cümle veya hükümlerin bir sonucu olduğunu söyler.

    Bu nedenle $2k+1$ formundadır. $\times$
    Bu nedenle $a = 2k+1$ formundadır. $\checkmark$

12. **Matematiksel metinlerin altın standardı anlaşılırlıktır.** Eğer bir kuralı çiğnemenin yazınızı daha anlaşılır hale getireceğine inanıyorsanız, o kuralı çiğnemekten kaçınmayın.

Matematiksel yazım yeteneğiniz pratik yaptıkça gelişecektir. İyi bir yazma sitili edinmenin en iyi yollarından birisi, başka insanların ispatlarını okumaktan geçer. İşe yarayaları benimseyip yaramayanlardan kaçının.

Ünite 5 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki önermeleri dolaylı ispat ile kanıtlayınız. (Her durumda, doğrudan ispatın nasıl yapılacağını da düşünün. Çoğu durumda dolaylı ispat daha kolaydır.)

1. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 çift ise n çifttir.
2. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 tek ise n tektir.
3. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2(b^2 - 2b)$ tek ise a ve b tektir.
4. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \nmid bc$ ise $a \nmid b$ olur.
5. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^2 + 5x < 0$ ise $x < 0$ olur.
6. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^3 - x > 0$ ise $x > -1$ olur.
7. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer ab ve $a + b$ çift ise a ve b çifttir.
8. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 \geq 0$ ise $x \geq 0$ olur.
9. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $3 \nmid n^2$ ise $3 \nmid n$ olur.
10. Kabul edelim ki $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x \nmid yz$ ise $x \nmid y$ ve $x \nmid z$ olur.
11. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x^2(y + 3)$ çift ise x çifttir veya y tektir.
12. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $4 \nmid a^2$ ise a tektir.
13. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^5 + 7x^3 + 5x \geq x^4 + x^2 + 8$ ise $x \geq 0$ olur.

B. Aşağıdaki önermeleri doğrudan veya dolaylı yoldan ispatlayınız.

14. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ve a ile b aynı pariteli ise $3a + 7$ ve $7b - 4$ karşıt paritelidir.
15. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x^3 - 1$ çift ise x tektir.
16. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x + y$ çift ise x ile y aynı paritelidir.
17. Eğer n tek ise $8 \mid (n^2 - 1)$ olur.
18. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod{3}$ olur.
19. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $a \equiv c \pmod{n}$ ise $c \equiv b \pmod{n}$ olur.
20. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ve $a \equiv 1 \pmod{5}$ ise $a^2 \equiv 1 \pmod{5}$ olur.
21. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$ olur.
22. Bir a tamsayısının n ile bölümünden kalan r ise $a \equiv r \pmod{n}$ olur.
23. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^2 \equiv ab \pmod{n}$ olur.
24. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $c \equiv d \pmod{n}$ ise $ac \equiv bd \pmod{n}$ olur.
25. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $2^n - 1$ asal ise n asaldır.
26. Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2^k - 1$ ise Pascal üçgeninin $n-$yinci satırındaki her sayı tektir.
27. Eğer $a \equiv 0 \pmod{4}$ veya $a \equiv 1 \pmod{4}$ ise $\binom{a}{2}$ çifttir.
28. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $4 \nmid (n^2 - 3)$ olur.
29. Eğer a ve b tamsayıları aynı anda sıfır değil ise $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(a - b, b)$ olur.
30. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $\text{ebob}(a, n) = \text{ebob}(b, n)$ olur.
31. Kabul edelim ki a ve b tamsayılarına bölme algoritması uygulanarak $a = qb + r$ elde edilsin. Bu durumda $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(r, b)$ olması gerektiğini ispatlayınız.
32. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise a ve b tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan aynıdır.

ÜNİTE 6

Olmayana Ergi

Şimdi, **olmayana ergi** ya da **çelişki ile ispat** adı verilen üçüncü bir ispat yöntemini inceleyelim. Bu yöntem sadece koşullu önerme ispatlarıyla sınırlı değildir. Herhangi türdeki bir önermeyi ispatlamak için kullanılabilir. Buradaki ana fikir, kanıtlanmak istenilen önermenin *yanlış* olduğunu kabul edip bunun bir çelişkiye yol açtığını göstermektir. Buna göre önermenin yanlış olduğu varsayımı yanlıştır. O hâlde önerme doğru olmak zorundadır. Örnek olarak aşağıdaki önermeye ve ispatına bakalım.

Önerme Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b \neq 2$ olur.

İspat. Kabul edelim ki bu önerme *yanlış* olsun.
Bu koşullu önermenin yanlış olması, $a^2 - 4b \neq 2$ ifadesini yanlış yapacak a ve b tamsayılarının var olması anlamına gelir.
Bir başka deyişle $\boxed{a^2 - 4b = 2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.
Bu denklemden $a^2 = 4b + 2 = 2(2b + 1)$ yazılabileceği için a^2 çifttir.
Eğer a^2 çift ise a çifttir. O hâlde $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.
Kutu içindeki ifadede $a = 2c$ yazılarak $(2c)^2 - 4b = 2$ yani $4c^2 - 4b = 2$ bulunur.
Bu denklemin her iki tarafı 2 ile bölünerek $2c^2 - 2b = 1$ elde edilir.
Bu ifadeye göre $1 = 2(c^2 - b)$ ve $c^2 - b \in \mathbb{Z}$ olacağı için 1 çifttir.
Bildiğimiz üzere 1 çift **değildir**. O hâlde ispatta bir şeyler yanlış gitmiştir. Fakat ispatın ilk cümlesinden sonraki bütün satırlar mantıksal olarak doğrudur. Bu nedenle ilk cümle yanlış olmalıdır. Bir başka deyişle, önermenin yanlış olduğunu kabul etmek yanlıştır. Bu nedenle önerme doğrudur. ■

Sonuca bu şekilde ulaşmak biraz şüphe uyandırabilir. Önümüzdeki bölümde, burada yaptığımız işin mantıksal olarak doğru olduğunu göreceğiz. Şimdilik ispatın sonunda ulaştığımız 1 çifttir sonucunun bu sayının tek olması ile çeliştiğini bilelim yeter. İşin özün itibariyle (1 tektir) $\wedge$ (1 çifttir) ifadesi $C \wedge \sim C$ formunda bir önermedir. Dikkat edilirse C önermesi ister doğru ister yanlış ne olursa olsun, $C \wedge \sim C$ önermesi her zaman yanlıştır. Bunun gibi doğru olamayacak bir önermeye **çelişki** denir. Çelişki, bu ispat yönteminde anahtar rolü oynar.

6.1 Önermelerin Olmayana Ergi Yöntemiyle İspatı

Şimdi, önceki sayfadaki ispatın mantıksal olarak doğru olduğunu görelim. Bahsedilen ispatta $P : (a,b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a^2 - 4b \neq 2)$ önermesini doğrulamamız istenmiştir. İspata, P'yi yanlış yani $\sim P$'yi doğru kabul ederek başladık ve $C \wedge \sim C$ sonucuna ulaştık. Başka bir deyişle $\sim P$'nin doğru olmasının $C \wedge \sim C$ önermesinin doğru olmasını gerektirdiğini gösterdik. Bu durum, $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ *koşullu* önermesinin doğru olması anlamına gelir. Yapılan işin P'yi ispatlamakla aynı olduğunu görmek için $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ önermesinin doğruluk tablosuna bakalım. Aşağıdaki tabloda P ve $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ önermeleri aynı sütunlara sahiptir. Yani bunlar mantıksal olarak denktir.

P	C	$\sim P$	$C \wedge \sim C$	$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
D	*D*	*Y*	*Y*	**D**
D	*Y*	*Y*	*Y*	**D**
Y	*D*	*D*	*Y*	**Y**
Y	*Y*	*D*	*Y*	**Y**

Sonuç olarak P önermesini ispatlamak için $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ koşullu önermesini ispatlamak yeterlidir. Bu iş, doğrudan ispat ile şu şekilde yapılabilir: $\sim P$ kabul edilir ve $C \wedge \sim C$ sonucuna ulaşılır. Yöntemin ana hatları şu şekildedir:

Özet: Olmayana Ergi ile İspat

Önerme P.

İspat. Kabul edelim ki $\sim P$ olsun.

$\vdots$

Bu nedenle $C \wedge \sim C$ olur. ■

İspatın başlangıcında C önermesinin bilinmiyor olması bu yöntemin tedirgin edici tarafıdır. Bu nedenle ispat üzerinde çalışırken $\sim P$ doğru kabul edilmeli ve bir C *ile* bunun değili olan $\sim C$ önermeleri elde edilene kadar yeni önermeler türetilmelidir.

Eğer bu yöntem kafanızı karıştırdıysa buna şu yönden bakabilirsiniz. İspatın ilk satırında $\sim P$ önermesinin doğru yani P önermesinin *yanlış* olduğunu kabul ederiz. Eğer P gerçekten doğruysa bu durum P'nin yanlış olduğu varsayımı ile çelişir. Fakat henüz P *ispatlanmadığı* için bu çelişki çok açık değildir. Bu nedenle, belirgin olmayan $\sim P$ çelişkisi mantık ve muhakeme çerçevesinde açıkça belirgin bir $C \wedge \sim C$ çelişkisine dönüştürülür.

Olmayana ergi ile ispat, belirli sayıların irrasyonel olduğunu göstermek için bu yöntemi kullanan Pisagorculara kadar uzanan çok eski bir yöntemdir. Sıradaki örnek, $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlamak için onların kullandığı mantığı takip eder. Hatırlanacağı üzere iki tamsayının oranı olarak yazılan bir sayı rasyoneldir. İki tamsayının oranı olarak yazılamayan bir sayı ise irrasyoneldir. Bu sayılar tam olarak şu şekilde tanımlanır.

Tanım 6.1 Eğer $x = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ var ise x **rasyoneldir**. Rasyonel olmayan yani her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $x \neq \frac{a}{b}$ olan bir reel sayı **irrasyoneldir**.

Artık $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlamak için olmayana ergi yöntemini kullanmaya hazırız. Bu yöntemin özetinde belirtildiği üzere ispatın ilk satırı *"Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir önermesi doğru olmasın."* olmalıdır. Zorunlu olmamakla birlikte, olmayana ergi yöntemini kullandığımızı okuyucuya bildirmek faydalı olacaktır. Bunu yapmanın standart yolu, ispatın ilk satırında *"İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir önermesi doğru olmasın."* ifadesini kullanmaktır.

Önerme $\sqrt{2}$ irrasyoneldir.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir önermesi doğru olmasın. Bu durumda $\sqrt{2}$ rasyoneldir. Yani

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{6.1}$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu kesir en sade hâlde olsun. Buna göre a ve b aynı anda çift olamaz. (İkisi birden çift ise pay ve paydadaki 2 çarpanları sadeleştirilebilir.) Eşitlik 6.1'de her iki tarafın karesi alınarak $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ya da

$$a^2 = 2b^2 \tag{6.2}$$

yazılabilir. O hâlde a^2 çifttir. Daha önce ispatlandığı üzere a^2 çift ise a çifttir. (Alıştırma 1, s. 136.) Üstelik a ve b aynı anda çift olamayacağı için b **tektir**. Şimdi, a çift olduğu için $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Eşitlik 6.2'de $a = 2c$ yazılarak $(2c)^2 = 2b^2$ yani $4c^2 = 2b^2$ bulunur. Buradan $b^2 = 2c^2$ bulunur. Bu sonuca göre hem b^2 hem de b çifttir. Ama daha önce b'nin tek olduğu sonucuna varılmıştır. Böylece, b çifttir **ve** b tektir çelişkisine ulaşılır. ■

Olmayana ergi yönteminin gücünün farkına varmak için yukarıdaki ispatı onsuz yapmaya çalıştığımızı düşünelim. İspata nereden başlamalıyız? Başlangıç varsayımları ne olmalıdır? Bu gibi soruların açık cevapları yoktur.

Olmayana ergi yöntemi bir başlangıç noktası sunar: $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayıp işe oradan başlarız.

Yukarıdaki ispatta ulaştığımız (b çifttir)$\wedge \sim$(b çifttir) çelişkisi $C \wedge \sim C$ formundadır. Ama elde edilen çelişkinin ille de bu formda olması gerekmez. Yanlış olduğu açıkça belli olan herhangi bir ifade elde etmek yeterlidir. Örneğin mantık çerçevesinde ulaşıldığı sürece $2 \neq 2$ veya $4|2$ gibi sonuçlar, oldukça makul birer çelişkidir.

En az Öklid'e kadar uzanan oldukça eski bir örnek verelim.

Önerme Sonsuz sayıda asal sayı vardır.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki sadece sonlu sayıda asal sayı var olsun. Bu durumda $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ vb. olmak üzere bütün asal sayıları $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ olarak listeleyebiliriz. Buna göre n−yinci sırada bulunan p_n en büyük asal sayıdır. Şimdi bütün asal sayıların çarpımına 1 eklenerek elde edilen $a = (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) + 1$ sayısını ele alalım. Dikkat edilirse 1'den büyük olan her doğal sayının en az bir tane asal böleni olduğu için yukarıda listelediğimiz n tane asal sayı arasında $p_k | a$ olacak şekilde bir p_k asalı vardır. Buna göre $a = cp_k$ yani

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k p_{k+1} \cdots p_n) + 1 = cp_k$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ bulabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını p_k ile bölerek

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n) + \frac{1}{p_k} = c$$

ve böylece

$$\frac{1}{p_k} = c - (p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n)$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin sağındaki ifade bir tamsayıdır ancak solundaki ifade bir tamsayı değildir. Bu ise bir çelişkidir. ■

Olmayana ergi yöntemi $\forall x, P(x)$ formundaki önerme ispatlarında genel olarak daha kullanışlıdır. Bunun sebebi, ispatın başlangıcındaki $\sim \forall x, P(x)$ varsayımıdır. Bölüm 2.10'dan hatırlanacağı üzere bu varsayım $\exists x, \sim P(x)$ ifadesine denktir. Bu ifade, $\sim P(x)$ önermesini doğru yapan özel bir x değeri verir. Genel olarak bu bilgi bir çelişki üretmek için yeterlidir. İşte bir örnek:

Önerme Her $x \in [0, \pi/2]$ reel sayısı için $\sin x + \cos x \geq 1$ olur.

İspat. Olmayana ergi kullanalım. Kabul edelim ki bu ifade doğru olmasın. Bu durumda $\sin x + \cos x < 1$ olacak şekilde bir $x \in [0, \pi/2]$ vardır.

Bu aralıkta $\sin x$ ve $\cos x$ negatif olmadıkları için $0 \le \sin x + \cos x < 1$ olur.
Buradan $0^2 \le (\sin x + \cos x)^2 < 1^2$ yani $0 \le \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x < 1$ bulunur.
Bu eşitsizlikte $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ yazılarak $0 \le 1 + 2\sin x \cos x < 1$ elde edilir.
Buradan $1 + 2\sin x \cos x < 1$ yazılabilir.
Bu eşitsizliğin her iki tarafından 1 çıkarılarak $2\sin x \cos x < 0$ elde edilir.
Son eşitsizlik, $\sin x$ ve $\cos x$ sayılarının negatif olmaması ile çelişir. ■

6.2 Koşullu Önermelerin Olmayana Ergi ile İspatı

Önceki iki ünitede özel olarak koşullu önerme ispatlarıyla ilgilendik. Şimdi yine bu önermelerin olmayana ergi ile ispatlarını resmiyete dökelim. Bunun için aşağıdaki bir önermeyi ispatlamak istediğimizi düşünelim.

Önerme Eğer P ise Q.

Bunu ispatlamak için $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olduğunu göstermek gerekir. Olmayana ergi yöntemi, $\sim(P \Rightarrow Q)$ önermesini doğru yani $P \Rightarrow Q$ önermesini yanlış kabul ederek başlar. Bilindiği üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin yanlış olması, P doğruyken Q'nun yanlış olması anlamına gelir. Bu nedenle ispatın ilk adımında P ve $\sim Q$ varsayılır. Bunun özeti aşağıdadır:

Özet: Koşullu Önermelerin Olmayana Ergi ile İspatı

Önerme Eğer P ise Q.

İspat. Kabul edelim ki P ve $\sim Q$ olsun.

⋮

Bu nedenle $C \wedge \sim C$ olur. ■

Bu yöntemi açıklamak için bilinen bir sonucu ele alalım: Eğer a^2 çift ise a çifttir. Yukarıdaki özete göre ispat *"İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki a^2 çift olsun ve a çift olmasın."* ile başlamalıdır.

Önerme Bir $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer a^2 çift ise a çifttir.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım.
Kabul edelim ki a^2 çift olsun ve a çift olmasın.
Bu durumda a^2 çifttir ve a tektir.
Dikkat edilirse a tek olduğu için $a = 2c + 1$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.
Buradan $a^2 = (2c+1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1$ yazılabileceği için a^2 tektir.
Sonuç olarak a^2 çifttir ve a^2 tektir. Bu bir çelişkidir. ■

Şimdi başka bir örnek verelim:

Önerme Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \geq 2$ ise $a \nmid b$ veya $a \nmid (b+1)$ olmalıdır.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $a \nmid b$ veya $a \nmid (b+1)$ ifadeleri doğru olmayacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \geq 2$ var olsun.
DeMorgan kurallarından $a \mid b$ ve $a \mid (b+1)$ yazılabilir.
Bölünebilme tanımına göre $b = ac$ ve $b+1 = ad$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır.
İkinci denklemden ilki çıkarılarak $ad - ac = 1$ yani $a(d-c) = 1$ bulunur.
Burada a pozitif olduğu için $d-c$ de pozitiftir. (Aksi hâlde $a(d-c)$ negatiftir.)
Böylelikle $d-c$ pozitifdir ve $a(d-c) = 1$ olduğu için $a = 1/(d-c) < 2$ olur.
Sonuç olarak $a \geq 2$ ve $a < 2$ bulunur. Bu bir çelişkidir. ■

6.3 Yöntemleri Birleştirmek

Çoğu karmaşık ispatlar, birden fazla ispatı içerisinde barındırır. Örneğin $P \Rightarrow Q$ koşullu önermesini ispatlarken, doğrudan ispat yöntemi ile başlayabilir ve Q önermesini doğrulamak için P önermesini doğru kabul edebiliriz. Ancak Q'nun doğru olması başka bir R önermesinin doğru olmasına dayanabilir. Böylelikle Q önermesini P ve R birlikte gerektirir. Bu nedenle en uygun ispat yöntemini kullanarak R önermesini kanıtlamak gerekir. Bu durum "ispat içinde ispata" yol açar. Şimdi buna bir örnek verelim. Aşağıdaki genel yaklaşım doğrudandır. Ancak doğrudan ispat, içerisinde olmayana ergi ile yapılan başka bir ispat içerir.

Önerme Sıfırdan farklı her rasyonel sayı, iki tane irrasyonel sayının çarpımı olarak yazılabilir.

İspat. Bu önerme şu şekilde ifade edilebilir: Eğer r sıfırdan farklı bir rasyonel sayı ise r iki tane irrasyonel sayının çarpımıdır. Bunu doğrudan ispat yöntemini kullanarak gösterelim.

Kabul edelim ki r sıfırdan farklı bir rasyonel sayı olsun. Buna göre $r = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca r aşağıdaki gibi iki sayının çarpımı olarak yazılabilir:

$$r = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Bilindiği üzere $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. İspatı tamamlamak için $\frac{r}{\sqrt{2}}$ sayısının da irrasyonel olduğunu göstermek gerekir.

Bu işi olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\frac{r}{\sqrt{2}}$ rasyonel olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{c}{d}$$

olacak şekilde c ve d tamsayıları vardır. Buradan

$$\sqrt{2} = r\frac{d}{c}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $r = \frac{a}{b}$ yazılarak

$$\sqrt{2} = r\frac{d}{c} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{cb}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olması anlamına gelir. Bu ise bir çelişkidir çünkü $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Bu nedenle $\frac{r}{\sqrt{2}}$ de irrasyoneldir.

Sonuç olarak $r = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}$ ifadesi iki tane irrasyonel sayının çarpımıdır. ■

Başka bir ispat-içinde-ispat örneği için bu ünitenin sonunda verilen 5. alıştırmayı çözebilirsiniz (veya çözümüne bir göz atabilirsiniz). Bu alıştırmada, $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermeniz istenecektir. Bu örnek $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermekten biraz daha zordur.

6.4 Çeşitli Tavsiyeler

Olmayana ergi güçlü bir ispat yöntemidir. Ancak bu yöntemi, doğrudan veya dolaylı ispat yöntemleri kullanılamaz gibi gözüktüğünde kullanmak en iyisidir. Bunun nedeni olmayana ergi yöntemi, içerisinde gizli ve basit bir dolaylı ispat barındırıyor olabilir. Bu nedenle daha basit olan yaklaşımla devam etmek en doğrusudur. Aşağıdaki örneğe bir göz atalım.

Önerme Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 - 2a + 7$ çift ise a tektir.

İspat. (Olmayana ergi) Aksine, $a^2 + 2a + 7$ çift olsun fakat a tek olmasın.
Bir başka deyişle $a^2 + 2a + 7$ ve a aynı anda çift olsun.
Bu göre $a = 2c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
Burda $a^2+2a+7 = (2c)^2+2(2c)+7 = 2(2c^2+2+3)+1$ olduğu için a^2+2a+7 tektir.
Böylece $a^2 + 2a + 7$ hem çifttir hem de tektir. Bu bir çelişkidir. ■

Bu ispatta yanlış olan hiçbir şey yoktur. Fakat a tamsayısının tek olmadığını varsayıp $a^2 + 2a + 7$ tamsayısının çift olmadığı sonucuna varılan kısmı göz önüne alalım. Burada dolaylı bir ispat yaklaşımı vardır. Bu nedenle dolaylı ispat kullananan aşağıdaki kanıt daha kullanışlıdır.

Önerme Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 - 2a + 7$ çift ise a tektir.

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki a tek olmasın. Bu durumda a çifttir. Yani $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada $a^2+2a+7 = (2c)^2+2(2c)+7 = 2(2c^2+2c+3)+1$ olduğu için a^2+2a+7 tektir. O hâlde a^2-2a+7 çift değildir. ■

Ünite 6 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki önermeleri olmayana ergi yöntemiyle ispatlayınız. Her durumda, doğrudan veya dolaylı ispat yöntemlerinin nasıl kullanılacağını da düşünün. (Çoğu durumda olmayana ergi yönteminin daha kolay olduğunu göreceksiniz.)

1. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n tek ise n^2 tektir.
2. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 tek ise n tektir.
3. $\sqrt[3]{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
4. $\sqrt{6}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
5. $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
6. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b - 2 \neq 0$ olur.
7. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b - 3 \neq 0$ olur.
8. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 + b^2 = c^2$ ise a veya b çifttir.
9. Herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer a rasyonel ve ab irrasyonel ise b irrasyoneldir.
10. $21a + 30b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları yoktur.
11. $18a + 6b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları yoktur.
12. Pozitif olan her $x \in \mathbb{Q}$ için $y < x$ olacak şekilde pozitif bir $y \in \mathbb{Q}$ vardır.
13. Her $x \in [\pi/2, \pi]$ için $\sin x - \cos x \geq 1$ olur.
14. Eğer A ve B iki küme ise $A \cap (B - A) = \emptyset$ olur.
15. Eğer $b \in \mathbb{Z}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $b \nmid k$ ise $b = 0$ olur.
16. Eğer a ve b pozitif reel sayılar ise $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ olur.
17. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $4 \nmid (n^2 + 2)$ olur.
18. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $4 \mid (a^2 + b^2)$ ise a ve b aynı anda tek olamaz.

B. Ünite 4, 5 ve 6'da verilen metodları kullanarak aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

19. Ardışık her beş tamsayının çarpımı 120 ile bölünebilir. (Örneğin $3, 4, 5, 6$ ve 7 tamsayılarının çarpımı 2520'dir ve $2520 = 120 \cdot 21$ olur.)
20. Eğer x ve y rasyonel ise $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki $P(x, y)$ noktasına bir **rasyonel** nokta denir. Bir başka deyişle $P(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ ise P rasyoneldir. Eğer $F(x_0, y_0) = 0$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ var ise $F(x, y) = 0$ denkleminin **rasyonel noktası** vardır denir. Örneğin $(x_0, y_0) = (1, 0)$ noktası $x^2 + y^2 - 1 = 0$ eğrisinin bir rasyonel noktasıdır. Buna göre $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisinin rasyonel bir noktasının olmadığını gösteriniz.
21. Alıştırma 20 (yukarıda), $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisi üzerinde bir rasyonel nokta olmadığını söyler. Bunu kullanarak $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.
22. Alıştırma 20'de verilen $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisinin rasyonel noktalarının olmaması, pozitif ve tek olan her k tamsayısına karşılık $x^2 + y^2 - 3^k = 0$ eğrisinin rasyonel noktalarının olmamasını gerektirir. Bunun nedenini açıklayınız.
23. Yukarıdaki sonucu kullanarak pozitif ve tek olan her k tamsayısına karşılık $\sqrt{3^k}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.
24. $\log_2 3$ irrasyoneldir.

Kısım III

İspat Üzerine Daha Fazlası

ÜNİTE 7

Koşulsuz Önermelerin İspatlanması

Son üç ünitede, üç tane temel ispat yöntemi verilmiştir. Bunlar; doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi yöntemleridir. Bu yöntemlerin üçü de *"Eğer P ise Q."* formundaki önermeleri kanıtlamak için kullanılır. Bildiğimiz üzere teoremlerin ve önermelerin büyük bir kısmı ya koşullu formdadır ya da yeniden yazılarak koşullu forma getirilebilir. Bu nedenle bu üç ana yöntem oldukça önemlidir. Ancak bazı teoremleri ve önermeleri koşullu bir forma dönüştürmek mümkün değildir. Örneğin bazı teoremler *"P ancak ve ancak Q."* formundadır. Bunlar tek değil, çift koşulludur. Bu ünitede, ancak-ve-ancaklı formda verilen teoremleri ispatlama yollarını inceleyeceğiz. Bunun yanı sıra iki tane farklı teorem tipine daha bakacağız.

7.1 Ancak ve Ancaklı İspatlar

Bazı önermeler

P ancak ve ancak Q

formundadır. Bölüm 2.4'ten bildiğimiz üzere bu önerme, aşağıdaki önermelerin **ikisinin birden** doğru olduğunu bildirir:

Eğer P ise Q.
Eğer Q ise P.

O hâlde *"P ancak ve ancak Q."* önermesini ispatlamak için **iki** tane koşullu önerme kanıtlamak gerekir. Bölüm 2.4'ten hatırlanacağı üzere $Q \Rightarrow P$ önermesine $P \Rightarrow Q$ önermesinin *karşıtı* denir. Bunlar, birer koşullu önermedir. İspatları; doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle yapılabilir. Bu metodun ana hatları şu şekildedir.

Özet: Ancak-ve-ancaklı ispatlar

Önerme P ancak ve ancak Q.

İspat.
[Doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi ile $P \Rightarrow Q$ kanıtlanır.]
[Doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi ile $Q \Rightarrow P$ kanıtlanır.]
■

Çok basit bir örnekle başlayalım. Sadece metodun ana hatlarını göstermek için doğru olduğunu zaten bildiğimiz "n tektir ancak ve ancak n^2 tektir" önermesini ispatlayalım. Bunun için (n tek) $\Rightarrow$ (n^2 tek) önermesini doğrudan, (n^2 tek) $\Rightarrow$ (n tek) önermesini de dolaylı yoldan ispatlayalım.

Önerme Bir n tamsayısı tektir ancak ve ancak n^2 tektir.

İspat. İlk önce n tek ise n^2 tamsayısının tek olması gerektiğini gösterelim. Kabul edelim ki n tek olsun. Tek sayı tanımına göre $n = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2+4a+1 = 2(2a^2+2a)+1$ olur. Bir tamsayının iki katından bir fazla olarak yazılan n^2 tektir.

Karşıt olarak, n^2 tek ise n tamsayısının tek olması gerektiğini gösterelim. Bunu dolaylı ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki n tek olmasın. Bu durumda n çifttir ve (çift sayı tanımından) $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $n^2 = (2a)^2 = 2(2a^2)$ olur. Bir tamsayının iki katı olarak yazılan n^2 çifttir. Yani n^2 tek değildir. Sonuç olarak n tek değil ise n^2 tek değildir. Bu "n^2 tek ise n tektir" önermesinin dolaylı ispatıdır. ■

"P ancak ve ancak Q." önermesini ispatlarken, $Q \Rightarrow P$ önermesin ispatına yeni bir paragrafta başlanmalıdır. Bu önerme, $P \Rightarrow Q$ önermesinin karşıtıdır. İspatın ilk kısmını bitirdiğimizi ve ikinci kısmına başladığımızı okuyucuya belirtmek için (yukarıda yaptığımız gibi) bu paragrafa *"Karşıt olarak"* ifadesiyle başlayabiliriz. Ayrıca bu paragrafta tam olarak neyin ispatlandığını yeniden hatırlatmak da iyi bir fikirdir.

Bir sonraki ispatının iki kısmında da doğrudan ispat yapılacaktır.

Önerme Kabul edelim ki $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a \equiv b \pmod{6}$ olması için gerek ve yeter şart $a \equiv b \pmod{2}$ ve $a \equiv b \pmod{3}$ olmasıdır.

İspat. İlk önce $a \equiv b \pmod{6}$ ise $a \equiv b \pmod{2}$ ve $a \equiv b \pmod{3}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod{6}$ olsun. Buna göre $6 \mid (a-b)$ olur. Yani

$$a - b = 6n$$

olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Bu eşitlik $a - b = 2(3n)$ şeklinde yazılır ise $2 \mid (a-b)$ olur. Buradan $a \equiv b \pmod{2}$ elde edilir. Aynı eşitlik $a - b = 3(2n)$ şeklinde yazılırsa $3 \mid (a-b)$ olur. Buradan da $a \equiv b \pmod{3}$ elde edilir.

Karşıt olarak, $a \equiv b \pmod{2}$ ve $a \equiv b \pmod{3}$ olsun. Öncelikle $a \equiv b \pmod{2}$ ise $2 \mid (a-b)$ olur. Buna göre $a - b = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. O hâlde $a - b$ çifttir. Benzer şekilde $a \equiv b \pmod{3}$ ise $3 \mid (a-b)$ olur. Buna göre

$$a - b = 3l$$

olacak şekilde bir $l \in \mathbb{Z}$ vardır. Dikkat edilirse $a-b$ çift olduğu için l çift olmalıdır. Aksi hâlde $a-b=3l$ tek olur (çünkü $a-b$ iki tane tek sayının çarpımıdır). Buna göre $l=2m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylelikle $a-b=3l=3\cdot 2m=6m$ yazılarak $6\,|(a-b)$ yani $a \equiv b \pmod 6$ bulunur. ■

Ancak-ve-ancaklı ispatlar daha önce öğrendiğimiz metodların kombinasyonu olduğu için bu bölümde başka örneklere yer vermeyeceğiz. Fakat becerilerinizi ünite sonuda verilen bazı alıştırmalar üzerinde test etmeniz son derece önemlidir.

7.2 Denk Önermeler

Diğer derslerde, bir liste hâlinde verilmiş önermelerin *"denk"* olduklarını iddia eden ancak ne tek koşullu ne de çift koşullu formda olan bir teorem türü karşınıza çıkabilir. Lineer cebir ders kitaplarında gördüğünüz (veya göreceğiniz) bu türdeki bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(a) A matrisi tersinirdir.

(b) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ denkleminin her $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ için tek bir çözümü vardır.

(c) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ denkleminin sadece aşikâr çözümü vardır.

(d) A matrisinin indirgenmiş eşelon formu I_n birim matrisidir.

(e) $\det(A) \neq 0$.

(f) A matrisinin tüm özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

Bir listedeki önermelerin "denk" olduklarını iddia eden teorem aslında önermelerinin ya hepsinin doğru ya da hepsinin yanlış olduğunu iddia eder. Buna göre $n \times n$ tipinde bir matris verildiğinde, yukarıdaki teorem o matris hakkındaki (a)'dan (f)'ye tüm önermelerin ya hepsinin doğru ya da hepsinin yanlış olduğunu belirtir. Örneğin $\det(A) \neq 0$ olduğu biliniyorsa yukarıdaki teorem, (e) önermesine ek olarak (a)'dan (f)'ye **tüm** önermelerin doğru olduğunu garanti eder. Diğer taraftan $\det(A)=0$ ise teorem (a)'dan (f)'ye bütün önermelerin yanlış olduğunu söyler. Bir A matrisi hakkında bildiklerimizi altı katına çıkaran bu teorem açıkçası çok faydalıdır.

Böyle bir teoremi ispatlamak için hangi metod kullanılır? Yukarıdaki teorem bir bakıma ancak-ve-ancaklı bir teoreme benzer çünkü $P \Leftrightarrow Q$ formundaki ancak-ve-ancaklı bir teorem, P ve Q'nun aynı anda doğru ya da aynı anda yanlış olduğunu söyler. Bir başka deyişle P ve Q denktir. $P \Leftrightarrow Q$ önermesini kanıtlamak için ilk önce $P \Rightarrow Q$ daha sonra $Q \Rightarrow P$ ispatlanır.

Böylece P'den Q'ya giden ve daha sonra P'ye geri dönen bir "döngü" oluşur. Bu bağlamda yukarıda verilen teoremi ispatlamanın bir yolu $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (e)$, $(e) \Rightarrow (f)$ ve $(f) \Rightarrow (a)$ koşullu önermelerini sırayla ispatlamaktır. Bu ispat yöntemi aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$\begin{array}{ccccc} (a) & \Longrightarrow & (b) & \Longrightarrow & (c) \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ (f) & \Longleftarrow & (e) & \Longleftarrow & (d) \end{array}$$

Yukarıdaki altı gerektirmenin hepsi ispatlandığında gerçekten de (a)'dan (f)'ye tüm önermelerin ya hepsi doğrudur ya da hepsi yanlıştır. Bunlardan bir tanesi doğru ise dairesel zincir, diğer tüm önermelerin doğru olmasını gerektirir. Eğer bir tanesi (örneğin (c)) yanlış ise $(b) \Rightarrow (c)$ doğru olduğu için (b) yanlıştır. Buna göre (b) yanlış ve $(a) \Rightarrow (b)$ doğru olduğu için (a) yanlıştır. Döngü üzerinde saatin tersi yönde hareket ederek diğerleri de görülebilir.

Sonuç olarak, n tane önermenin denk olduğunu ispatlamak için dairesel bir formda konuşlandırılmış n tane koşullu önermeden her birinin dairesel sıradaki diğer önermeyi gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Ancak ille de dairesel form zorunlu değildir. Örneğin, aşağıdaki şemalardan herhangi biri de aynı işi yapar.

$$\begin{array}{ccccc} (a) & \Longrightarrow & (b) & \Longleftrightarrow & (c) \\ \Uparrow & & \Downarrow & & \\ (f) & \Longleftarrow & (e) & \Longleftrightarrow & (d) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} (a) & \Longleftrightarrow & (b) & \Longleftrightarrow & (c) \\ & & \Updownarrow & & \\ (f) & \Longleftrightarrow & (e) & \Longleftrightarrow & (d) \end{array}$$

İspatlanacak koşullu önerme sayısı, dairesel şemalarda en azdır. Kullanılan şema ne olursa olsun koşullu önermelerin her biri doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle kanıtlanabilir.

Bu tür ispatlara bu kitapta yer verilmeyecektir. Fakat diğer derslerde bunlarla karşılaşacağınızdan emin olabilirsiniz.

7.3 Varlık İspatları; Varlık ve Teklik İspatları

Bu noktaya kadar sadece tek koşullu veya iki ya da daha fazla koşullu formda yazılan önermelerle ilgilendik. Bu önermeler genellikle $P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundadır. (Buradaki değişken sayısı birden fazla olabilir.) Bölüm 2.8'den hatırlanacağı üzere bu önermeler evrensel olarak nicelenmiş $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundaki önermeler olarak da yorumlanabilir.

Bu nedenle koşullu önermeler evrensel olarak nicelenmiş önermelerdir. Bunları doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle ispatlarken aslında evrensel olarak nicelenmiş bir önerme ispatlarız.

Buna karşılık *varlıksal* olarak nicelenmiş bir önermeyi nasıl ispatlarız? Bir başka ifadeyle

$$\exists x, R(x)$$

formundaki bir önermeyi ispatlamak için nasıl bir yöntem takip edebiliriz? Bu önerme, $R(x)$ önermesini doğrulayan özel bir x niceliğinin var olduğunu iddia eder. O hâlde $\exists x, R(x)$ önermesini ispatlamak için yapılması gereken tek şey, önermeyi doğrulayan *x örneğini* ortaya koymaktır.

Önermelerin ve teoremlerin büyük çoğunluğu koşullu (veya çift koşullu) formda olsa da bunların az bir kısmı $\exists x, R(x)$ formundadır. Bu formdaki önermelere **varlık önermeleri**, teoremlere ise **varlık teoremleri** denir. Bir varlık teoremini kanıtlamak için yapılması gereken iş, onu doğrulayan bir örnek vermektir. Genelde bu oldukça basittir. (Ama her zaman değil!) Şimdi buna birkaç örnek verelim:

Önerme Çift olan bir asal sayı vardır.

İspat. 2 hem çifttir hem de asaldır. ■

Kuşkusuz ki bu çok basit bir örnek oldu. Şimdi daha zor olana bakalım.

Önerme İki küpün toplamı olarak iki farklı biçimde yazılabilen bir tamsayı vardır.

İspat. 1729 tamsayısını göz önüne alalım. Dikkat edilirse $1^3 + 12^3 = 1729$ ve $9^3 + 10^3 = 1729$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla 1729 sayısı, iki küpün toplamı olarak iki farklı şekilde yazılabilir. ■

Varlık önermelerinin ispatlarında bazen verilen örneğin gerçekten de işe yaradığını göstermek gerekir. Örneğin yukarıdaki ispatta 1729 sayısının, iki tane küpün toplamı olarak iki farklı şekilde yazılabileceği sadece iddia edilip bunun *nasıl* yapılacağını gösterilmeseydi ispat eksik kalırdı.

Uyarı: Varlık önermelerini ispatlamak için bir örnek vermek yeterlidir. Ancak koşullu önermeleri ispatlamak için bir örnek vermek yeterli değildir.

Genel olarak varlık önermeleri, koşullu önermeler içerisine gömülüdür. Bunu görmek için aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım. (Sayfa 116'daki ebob tanımını hatırlayın.)

Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $\operatorname{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu önerme, aşağıdaki forma sahip koşullu bir önermedir:

$$a, b \in \mathbb{N} \implies \exists\, k, l \in \mathbb{Z},\ \operatorname{ebob}(a, b) = ak + bl.$$

Bu önermeyi doğrudan ispat ile kanıtlamak için $a, b \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edip "$\exists k, l \in \mathbb{Z}$, $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$" varlık önermesini ispatlamak gerekir. Bir başka deyişle $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde (a ile b'ye bağlı) k ve l tamsayılarını bulmak gerekir. Şimdi bu planı uygulayalım. (Bu önerme, ileride birçok defa kullanacağımız temel bir önermedir. Bu nedenle buna bir numara verelim.)

Önerme 7.1 Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat. (Doğrudan ispat). Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $A = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesini ele alalım. Bu küme, pozitif ve negatif tamsayıların yanı sıra sıfırı içerir. (Bunun sebebi şudur: Eğer $y = 0$ seçilir ve x değişkeni tamsayılar kümesi üzerinde değer alır ise $ax + by = ax$ sayısı a'nın sıfır, pozitif ve negatif tüm katlarını içerir.) A kümesinin en küçük *pozitif* elemanı d olsun. Buna göre, $d \in A$ olduğu için, $d = ak + bl$ olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır.

İspatı tamamlamak için $d = \text{ebob}(a, b)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için d tamsayısının a ile b sayılarını böldüğünü ve ortak bölenlerin de *en büyüğü* olduğunu gösterelim.

İlk önce $d \mid a$ olduğunu gösterelim. Bölme algoritmasını (s. 30) kullanıp, $0 \le r < d$ olmak üzere, $a = qd + r$ yazabiliriz. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(ak + bl) \\ &= a(1 - qk) + b(-ql) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dikkat edileceği üzere r tamsayısı $r = ax + by$ formunda olduğu için A kümesine aittir. Fakat A kümesinin en küçük pozitif elemanı d ve $0 \le r < d$ olduğu için r pozitif olamaz. Yani $r = 0$ olmalıdır. Buradan $a = qd$ yani $d \mid a$ bulunur. Aynı argüman, $b = qd + r$ denklemi için tekrarlanarak $d \mid b$ olduğu gösterilebilir. O hâlde d tamsayısı a ve b'nin ortak bir bölenidir. Geriye d'nin ortak bölenlerin *en büyüğü* olduğunu göstermek kalır.

Dikkat edilirse $\text{ebob}(a, b)$ değeri a ve b tamsayılarını böler. Bundan dolayı $a = \text{ebob}(a, b) \cdot m$ ve $b = \text{ebob}(a, b) \cdot n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $d = ak + bl = \text{ebob}(a, b) \cdot mk + \text{ebob}(a, b) \cdot nl = \text{ebob}(a, b)(mk + nl)$ bulunur. O hâlde d tamsayısı $\text{ebob}(a, b)$ değerinin bir katıdır. Yani $d \ge \text{ebob}(a, b)$ yazılabilir. Ancak d tamsayısı ortak bölenlerin en büyüğünden daha büyük olamaz. Sonuç olarak $d = \text{ebob}(a, b)$ olmalıdır. ■

Bu bölümü *teklik ispatları* adı verilen ispatlardan bahsederek bitirelim. Bazı varlık önermeleri *"Bir ve sadece bir x vardır öyle ki $P(x)$."* ya da kısaca *"Bir tek x vardır öyle ki $P(x)$."* formundadır. Böyle bir önerme, $P(x)$ doğru olacak şekilde *sadece bir tane x* olduğunu belirtir. Bunu ispatlamak için $P(d)$ doğru olacak biçimde bir $x = d$ değeri bulmak **ve** bunu sağlayan tek değerin d olduğunu göstermek gerekir. Şimdi örnek olarak $\{ax+by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin sadece $\text{ebob}(a,b)$ değerinin katlarından oluştuğunu gösterelim.

Önerme Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Bir ve sadece bir $d \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki m tamsayısı d'nin bir katıdır ancak ve ancak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ ve $d = \text{ebob}(a,b)$ olsun. İlk önce "m tamsayısı d'nin bir katıdır ancak ve ancak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır." önermesini ispatlayalım. Eğer $m = dn$ sayısı d'nin bir katı ise Önerme 7.1'e göre $d = ak + bl$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $m = dn = (ak + bl)n = a(kn) + b(ln)$ olur. Eğer $x = kn$ ve $y = ln$ seçilirse $m = ax + by$ elde edilir.

Karşıt olarak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ var olsun. Tanımı gereği $d = \text{ebob}(a,b)$ değeri a ve b sayılarını böler. O hâlde $a = dc$ ve $b = de$ olacak şekilde $c, e \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $m = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ bulunur. Sonuç olarak $d \mid m$ elde edilir.

Yukarıda "m tamsayısı d doğal sayısının bir katıdır ancak ve ancak $m = ax+by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır" önermesini sağlayan bir d olduğunu gösterdik. Geriye, bu şartı sağlayan *tek* doğal sayının d olduğunu göstermek kaldı. Bunun için d ile aynı özelliğe sahip yani aşağıdaki önermeyi sağlayan bir d' doğal sayısının var olduğunu kabul edelim:

$$\begin{pmatrix} m \text{ tamsayısı } d' \text{ doğal} \\ \text{sayısının bir katıdır} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} m = ax + by \text{ olacak} \\ \text{şekilde } x, y \in \mathbb{Z} \text{ vardır} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Buna göre $d = d'$ olduğunu gösterelim. Eşitlik 7.1'den $m = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$ ve $m = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$ yazılabilir. Bu nedenle a ile b sayıları d' doğal sayısının birer katıdır. O hâlde d' bu sayıların bir ortak bölenidir. Buradan

$$d' \leq \text{ebob}(a,b) = d$$

elde edilir. Şimdi d' doğal sayısının $m = d' \cdot 1 = d'$ katını ele alalım. Yine 7.1 gereğince $d' = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ bulunabilir. İspatın ikinci paragrafında belirtildiği gibi $a = dc$ ve $b = de$ olacak şekilde $c, e \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $d' = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ bulunur. O hâlde d' sayısı d sayısının bir katıdır. Hem d hem de d' pozitif olduğu için

$$d \leq d'$$

olmalıdır. Sonuç olarak $d' \leq d$ ve $d' \leq d$ bulunur. Buradan $d = d'$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

7.4 Yapısal İspatlar ve Yapısal Olmayan İspatlar

Varlık ispatları, yapısal ispatlar ve yapısal olmayan ispatlar olarak iki gruba ayrılır. Yapısal ispatlar, teoremi kanıtlayan örneği açık bir şekilde ortaya koyar. Yapısal olmayan ispatlar ise örneği açıkça vermez ancak onun var olduğunu gösterir. Aralarındaki farkı görmek için "Öyle x ve y *irrasyonel* sayıları vardır ki x^y *rasyoneldir*." önermesini iki faklı şekilde ispatlayalım.

Önerme Öyle x ve y irrasyonel sayıları vardır ki x^y rasyoneldir.

İspat. Kabul edelim ki $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ve $y = \sqrt{2}$ olsun. Bilindiği üzere y irrasyoneldir. Fakat x sayısının rasyonel mi yoksa irrasyonel mi olduğu açık değildir. Bir tarafta x irrasyonel ise

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

rasyoneldir. Öbür tarafta x rasyonel ise $y^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = x$ rasyoneldir. Her hâlükârda irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvveti rasyonel olmuş olur. ■

Yukarıdaki örnek, klasik bir **yapısal olmayan** ispat örneğidir. Sayıları açıkça vermeden (ya da inşa etmeden) x^y rasyonel olacak şekilde x ve y irrasyonel sayılarının var olduğunu gösterir. Herkesi $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ veya $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ifadelerinden birinin, irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvveti olan rasyonel sayı olduğuna ikna eder. Anacak bunun hangisi olduğunu söylemez. Bu nedenle açıkça vermeden böyle bir örneğin var olduğunu kanıtlar.

Şimdi x^y rasyonel olacak şekilde x ve y irrasyonel sayılarını ortaya koyan (ya da inşa eden) **yapısal ispatı** yapalım.

Önerme Öyle x ve y irrasyonel sayıları vardır ki x^y rasyoneldir.

İspat. Kabul edelimki $x = \sqrt{2}$ ve $y = \log_2 9$ olsun. Bu durumda

$$x^y = \sqrt{2}^{\log_2 9} = \sqrt{2}^{\log_2 3^2} = \sqrt{2}^{2\log_2 3} = \left(\sqrt{2}^2\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$$

olur. Dikkat edilirse 3 rasyoneldir. O hâlde $x^y = 3$ rasyoneldir.

Bilindiği üzere $x = \sqrt{2}$ irrasyoneldir. Eğer $y = \log_2 9$ sayısının irrasyonel olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanır. Bunu olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\log_2 9$ rasyonel olsun. Bu durumda $\frac{a}{b} = \log_2 9$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Buna göre $2^{a/b} = 9$ yazılabilir. Buradan $(2^{a/b})^b = 9^b$ veya $2^a = 9^b$ elde edilir. Dikkat edilirse 2^a çifttir fakat 9^b tektir (çünkü 9 ile kendisinin b defa çarpımı daima tektir). Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki varlık ispatı, kendi içerisinde ayrı bir ispat barındırır. Bu ispat, $\log_2 9$ sayısının (olmayana ergi ile) irrasyonel olduğunu gösterir. İspat yöntemlerinin böyle birbiri içinde kullanılması oldukça normaldir.

Diğer kitaplardaki veya makalelerdeki ispatları okurken ya da kendi ispatlarınızı yaparken, yapısal olan ve yapısal olmayan ispatlara karşı hazırlıklı olmalısınız.

Ünite 7 Alıştırmaları

Aşağıdaki önermeleri ispatlayınız. Buradaki alıştırmalar, Üniteler 4-7'de ele alınan yöntemlerin tamamını kapsayan kümülatif alıştırmalardır.

1. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda x çifttir ancak ve ancak $3x+5$ tektir.
2. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda x tektir ancak ve ancak $3x+6$ tektir.
3. Bir a tamsayısı verilsin. Buna göre a^3+a^2+a çifttir ancak ve ancak a çifttir.
4. Bir a tamsayısı verilsin. Buna göre a^2+4a+5 tektir ancak ve ancak a çifttir.
5. Bir a tamsayısı tektir ancak ve ancak a^3 tektir.
6. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x^3+x^2y = y^2+xy$ olması için gerek ve yeter şart $y = x^2$ veya $y = -x$ olmasıdır.
7. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $(x+y)^2 = x^2+y^2$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ veya $y = 0$ olmasıdır.
8. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a \equiv b \pmod{10}$ olması için gerek ve yeter şartın $a \equiv b \pmod 2$ ve $a \equiv b \pmod 5$ olduğunu ispatlayınız.
9. Bir $a \in \mathbb{Z}$ için $14 \mid a$ ancak ve ancak $7 \mid a$ ve $2 \mid a$ olduğunu ispatlayınız.
10. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ise $a^3 \equiv a \pmod{10}$ olur.
11. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $(a-3)b^2$ çifttir ancak ve ancak a tektir veya b çifttir.
12. $x^2 < \sqrt{x}$ olacak şekilde pozitif bir x reel sayısı vardır.
13. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a+b$ tek ise a^2+b^2 tektir.
14. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a^2 \mid a$ olması için gerek ve yeter şart $a \in \{-1, 0, 1\}$ olmasıdır.
15. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a+b$ çifttir ancak ve ancak a ile b aynı paritelidir.
16. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer ab tek ise a^2+b^2 çifttir.
17. 90 ile 100 arasında bir asal sayı vardır.
18. $\mathbb{N} \in X$ ve $\mathbb{N} \subseteq X$ olacak şekilde bir X kümesi vardır.
19. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ olur.

20. $11 \mid (2^n - 1)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

21. Üçüncü dereceden $x^3 + x - 3 = 0$ denkleminin her çözümü irrasyoneldir.

22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $4 \mid n^2$ veya $4 \mid (n^2 - 1)$ olur.

23. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ veya $a \mid (b^2 - c)$ ise $a \mid c$ olur.

24. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ise $a \nmid (a^2 - 3)$ olur.

25. Kabul edelim ki p bir tamsayı ve $p > 1$ olsun. Eğer $2 \leq n \leq \sqrt{p}$ şartını sağlayan her n tamsayısı için $n \nmid p$ ise p asaldır.

26. Ardışık n tane pozitif tamsayının çarpımı $n!$ ile bölünür.

27. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a^2 + b^2$ bir tamkare ise a ve b aynı anda tek değildir.

28. Bölme algoritmasını ispatlayınız: Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $a = bq + r$ ve $0 \leq r < b$ olacak şekilde q ve r tamsayıları vardır. Üstelik bu sayılar *bir tektir*. (Bu ispatın varlık kısmı Bölüm 1.9'da ispatlanmıştır. Buna teklik kısmı da eklenmelidir.)

29. Eğer $a \mid bc$ ve $\text{ebob}(a, b) = 1$ ise $a \mid c$ olur.
(Yol gösterme: 152. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

30. Kabul edelim ki $a, b, p \in \mathbb{Z}$ ve p asal olsun. Eğer $p \mid ab$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$ olur.
(Yol gösterme: 152. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

31. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(n, n+1) = 1$ olur.

32. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(n, n+2) \in \{1, 2\}$ olur.

33. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(2n+1, 4n^2+1) = 1$ olur.

34. Eğer $\text{ebob}(a, c) = \text{ebob}(b, c) = 1$ ise $\text{ebob}(ab, c) = 1$ olur.
(Yol gösterme: 152. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

35. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre $a = \text{ebob}(a, b)$ ancak ve ancak $a \mid b$ olur.

36. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre $a = \text{ekok}(a, b)$ ancak ve ancak $b \mid a$ olur.

ÜNİTE 8

Kümeleri İçeren İspatlar

Öğrenciler, aldıkları ilk ileri düzey matematik derslerinde, kümelerin oynadığı kapsamlı role ve karşılaştıkları çoğu ispatın kümeler hakkında olmasına genelde çok şaşırır. Lineer cebir derslerinde muhtemelen bu tür ispatlarla karşılaşmışsınızdır. Örneğin, belirli özellikleri sağlayan (ve vektörler diye adlandırılan) nesnelerin *kümesi* bir **vektör uzayı** olarak adlandırılır. Ders kitabınız kümeler teorisi yöntemlerini kullanarak, mesela iki vektör uzayının kesişiminin yine bir vektör uzayı olması gibi, vektör uzayları konusunda birçok şey ispatlamıştır. Matematik bilginiz arttıkça, kümeleri içeren teoremler ve ispatlar konusunda daha fazla fikir edineceksiniz. Bu ünitenin amacı, sizi buna hazırlayacak temeli kazandırmaktır.

Bu ünitede; bir nesnenin, bir kümenin elemanı olduğunu nasıl göstereceğimizi; bir kümenin, başka bir kümenin altkümesi olduğunu nasıl ispatlayacağımızı ve iki kümenin eşit olduğunu nasıl kanıtlayacağımız tartışacağız. Bunu yaparken, belleğimizi tazelemek adına Ünite 1'e atıf yapmak gerekebilir. Sizlere kolaylık sağlamak için Ünite 1'de verilen ana tanımları özetleyelim: Eğer A ve B iki küme ise

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(x,y) : x \in A, y \in B\},\\
A \cup B &= \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},\\
A \cap B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},\\
A - B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},\\
\overline{A} &= E - A,
\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Hatırlanacağı üzere $A \subseteq B$ ifadesi, A kümesindeki her elemanın aynı zamanda B kümesinde olması anlamına gelir. Ayrıca A'nın *kuvvet kümesi,* A'nın bütün alt kümelerinin kümesidir:

$$\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

8.1 "$a \in A$" Önermesi Nasıl İspatlanır

Ortak özellik yöntemini tekrar ederek başlayalım. Sonrasında, verilen bir a nesnesinin bir A kümesine ait olduğunu nasıl göstereceğimize bakalım.

Ortak özellik yöntemini kullanarak bir A kümesini $A = \{x : P(x)\}$ ile gösterelim. $P(x)$ burada x hakkında hüküm bildiren bir açık önermedir. A kümesi, $P(x)$ önermesini doğru yapan tüm x değerlerinden oluşur. Örneğin,

$$\{x : x \text{ tek tamsayıdır}\} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}.$$

Bu notasyonun yaygın bir kullanımı da $A = \{x \in S : P(x)\}$ şeklindedir. Buna göre A kümesi, (önceden belirlenmiş) bir S kümesinde olan ve P önermesini doğrulayan tüm x elemanlarından oluşur. Unutulmamalıdır ki duruma göre x herhangi bir nesne (tamsayı, sıralı ikili, küme, fonksiyon vb.) olabilir. Ayrıca x değişkeninin özel bir anlamı yoktur. Herhangi x, y, k vb. makul bir sembol kullanılabilir. Aşağıda bunun bazı örnekleri verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ tektir}\} &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\},\\
\{x \in \mathbb{N} : 6 \mid x\} &= \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\},\\
\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b = a + 5\} &= \{\ldots, (-2,3), (-1,4), (0,5), (1,6), \ldots\},\\
\{X \in \mathscr{P}(\mathbb{Z}) : |X| = 1\} &= \{\ldots, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Artık bir nesnenin $\{x : P(x)\}$ kümesine ait olduğunu nasıl göstereceğimiz anlaşılmış olmalıdır. $\{x : P(x)\}$ kümesi, $P(x)$ önermesini doğrulayan tüm x değerlerinden oluşur. Dolayısıyla $a \in \{x : P(x)\}$ olduğunu göstermek için $P(a)$ önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Benzer şekilde $a \in \{x \in S : P(x)\}$ olduğunu göstermek için $a \in S$ olmasının *yanı sıra* $P(a)$ önermesinin doğru olduğu gösterilmelidir. Bu fikirler aşağıda özetlenmiştir. Bu metodları **ezberlememeli** fakat **anlamalısınız**. Bunlar, düşündükçe ve pratik yaptıkça daha doğal ve kullanılabilir bir hâle gelecektir.

$a \in \{x : P(x)\}$ **nasıl ispatlanır**	$a \in \{x \in S : P(x)\}$ **nasıl ispatlanır**
$P(a)$'nın doğru olduğu gösterilir.	Önce $a \in S$ doğrulanır. Sonra $P(a)$'nın doğru olduğu gösterilir.

Örnek 8.1 $A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ ve } 7 \mid x\}$ kümesinin elemanlarını inceleyelim. Eğer $P(x)$ açık önermesi $(x \in \mathbb{N}) \wedge (7 \mid x)$ ile temsil edilirse $A = \{x : P(x)\}$ yazılabilir. Buna göre $P(21)$ doğru olduğu için $21 \in A$ olur. Benzer şekilde $7, 14, 28, 35$ vb. sayılarının hepsi A kümesinin elemanlarıdır. Fakat örneğin $P(8)$ yanlış olduğu için $8 \notin A$ olur. Aynı şekilde $P(-14)$ yanlış olduğu için $-14 \notin A$ olur.

Örnek 8.2 $A = \{X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) : |X| = 3\}$ kümesini ele alalım. Dikkat edilirse $\{4, 13, 45\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ve $|\{4, 13, 45\}| = 3$ olduğu için $\{4, 13, 45\} \in A$ olur. Aynı şekilde $\{1, 2, 3\} \in A$ ve $\{10, 854, 3\} \in A$ olduğu görülebilir. Fakat $|\{1, 2, 3, 4\}| \neq 3$ olduğu için $\{1, 2, 3, 4\} \notin A$ olur. Dahası $\{-1, 2, 3\} \notin \mathscr{P}(\mathbb{N})$ olduğu için $\{-1, 2, 3\} \notin A$ olur.

Örnek 8.3 $B = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 5\}$ kümesini ele alalım. Dikkat edileceği üzere $(8,23) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $8 \equiv 23 \pmod 5$ olduğu için $(8,23) \in B$ olur. Benzer şekilde $(100,75) \in B$, $(102,77) \in B$ fakat $(6,10) \notin B$ olduğu görülebilir.

Şimdi $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(4n+3, 9n-2)$ sıralı ikilisini ele alalım. Bu ikili, B kümesine ait midir? Bu soruya cevap vermek için önce $(4n+3, 9n-2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sonra da $(4n+3)-(9n-2) = -5n+5 = 5(1-n)$ olduğu gözlemlenebilir. Buradan $5 \mid \big((4n+3)-(9n-2)\big)$ yani $(4n+3) \equiv (9n-2) \pmod 5$ bulunur. O hâlde $(4n+3, 9n-2)$ sıralı ikilisi, B kümesine ait olabilmek için gerekli şartları taşımaktadır. Bu nedenle her $n \in \mathbb{Z}$ için $(4n+3, 9n-2) \in B$ olur.

Örnek 8.4 Kümeleri tanımlarken kullanılan başka bir yolu daha verelim. $C = \{3x^3 + 2 : x \in \mathbb{Z}\}$ kümesini ele alalım. Bu küme, x tamsayılarına karşılık gelen $3x^3+2$ formundaki sayılardan oluşur. Örneğin, $-22 = 3(-2)^3+2$ olduğu için $-22 \in C$ olur. Ayrıca $-1 \in C$, $5 \in C$ fakat $0 \notin C$, $\frac{1}{2} \notin C$ olduğu gösterilebilir.

8.2 "$A \subseteq B$" Önermesi Nasıl İspatlanır

Bu derste (ve daha önemlisi onun ötesinde) bir kümenin, başka bir kümenin altkümesi olduğunu göstermeniz gereken birçok durum karşınıza çıkacaktır. Bu bölümde bunun nasıl yapılacağı açıklanacaktır. Buradaki metodlar hem kendi ispatlarınızı yazma hem de okuduğunuz ispatları anlama becerinizi geliştirecektir.

Tanım 1.3'den hatırlanacağı üzere eğer A ve B iki küme ise $A \subseteq B$ ifadesi, A kümesinin her elemanının aynı zamanda B kümesinin de bir elemanı olması anlamına gelir. Başka bir deyişle *eğer $a \in A$ ise $a \in B$ olur.* Bu nedenle $A \subseteq B$ olduğunu ispatlamak için

"Eğer $a \in A$ ise $a \in B$ olur."

koşullu önermesini kanıtlamak gerekir. Bu iş, doğrudan ispat yöntemiyle şu şekilde yapılır: $a \in A$ kabul edilir ve $a \in B$ olduğu gösterilir. Ayrı bir seçenek de dolaylı ispat yöntemidir. Bunun için $a \notin B$ kabul edilir ve $a \notin A$ olduğu gösterilir. Bu seçenekler aşağıda özetlenmiştir.

"$A \subseteq B$" nasıl ispatlanır
(Doğrudan ispat)

İspat. Kabul edelim ki $a \in A$ olsun. $\vdots$ Buradan $a \in B$ bulunur. Sonuç olarak $a \in A$ olması $a \in B$ olmasını gerektirir. Buna göre $A \subseteq B$ olur. ■

"$A \subseteq B$" nasıl ispatlanır
(Dolaylı ispat)

İspat. Kabul edelim ki $a \notin B$ olsun. $\vdots$ Buradan $a \notin A$ bulunur. Sonuç olarak $a \notin B$ olması $a \notin A$ olmasını gerektirir. Buna göre $A \subseteq B$ olur. ■

Pratik olarak en yalın ve en kolay ispatlar genelde doğrudan ispat ile yapılır. Nadiren de dolaylı ispat yaklaşımı daha uygundur. ($A \subseteq B$ önermesi olmayana ergiyle bile ispatlanabilir. Bunun için $(a \in A) \wedge (a \notin B)$ kabul edilir ve bir çelişkiye ulaşılır.) Bu bölümün geri kalan kısmı, ara sıra yorum içeren örneklerden oluşmaktadır. Aksi belirtilmedikçe tüm ispatlar doğrudan ispat yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Yukarıda özeti verilen bu ispat yaklaşımının nasıl kullanıldığına özellikle dikkat edilmelidir.

Örnek 8.5 $\{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\}$ olsun.
Buna göre $a \in \mathbb{Z}$ ve $18 \mid a$ olur.
Bölünebilme tanımı gereğince $a = 18c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
Buradan $a = 6(3c)$ yazılarak $6 \mid a$ bulunur.
O hâlde a tamsayısı 6 ile bölünür ve böylece $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ elde edilir.

Sonuç olarak $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\}$ olması $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olmasını gerektirir. Buna göre $\{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olur. ■

Örnek 8.6 $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olsun.
Kesişim tanımından $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$ ve $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ yazılabilir.
Öncelikle $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$ olduğu için $2 \mid a$ olur.
Bu nedenle $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır yani a çifttir.
Öte yandan $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olduğu için $9 \mid a$ olur.
Bu nedenle $a = 9d$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{Z}$ vardır.
Burada a çift ve $a = 9d$ olduğu için d çifttir. (Aksi hâlde $a = 9d$ tek olur.)
O hâlde $d = 2e$ olacak şekilde bir $e \in \mathbb{Z}$ vardır ve $a = 9d = 9(2e) = 6(3e)$ yazılabilir.
Dikkat edilirse $a = 6(3e)$ eşitliği, $6 \mid a$ ve böylece $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ anlamına gelir.

Sonuç olarak $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olması $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olmasını gerektirir. Buna göre $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olur. ■

Örnek 8.7 $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olduğunu gösteriniz.

İspat. Kabul edelim ki $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\}$ olsun.
Buna göre $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $a \equiv b \pmod 6$ olur.
Buradan $6 \mid a - b$ olacağı için $(a-b) = 6c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.
Eğer $a - b = 3(2c)$ olarak yazılırsa $3 \mid (a-b)$ yani $a \equiv b \pmod 3$ elde edilir.

Sonuç olarak $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\}$ olması durumunda $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olması gerektiği görülür. Bundan dolayı $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olur. ■

Altkümeleri içeren bazı önermeler yeterince açık olduğu için bunları ispatlamadan doğru kabul edebiliriz (ve kullanabiliriz). Örneğin A ve B iki küme ise $A \cap B \subseteq A$ olduğunu göstermek çok kolaydır. (Eğer $x \in A \cap B$ kabul edilirse kümelerin kesişim tanımından $x \in A$ ve $x \in B$ olur. Burada özel olarak $x \in A$ olduğu için $x \in A \cap B$ olması $x \in A$ olmasını gerektirir. Böylece $A \cap B \subseteq A$ elde edilir.) $A \subseteq A \cup B$ ve $A - B \subseteq A$ önermeleri de bu niteliktedir. Bunlara $\big((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)\big) \Rightarrow (A \subseteq C)$ ve $(X \subseteq A) \Rightarrow (X \subseteq A \cup B)$ örneklerinde olduğu gibi koşullu önermeler eklenebilir. Bu kitaptaki temel yaklaşım, doğruluğu açık olan önermeleri bizden istemediği sürece ispatlamamaktır. (Yine de kendinizi yukarıdaki önermelerin doğru olduklarına ikna etmek için kafadan hızlı ispatlar yapabilirsiniz. Eğer $A \cap B \subseteq A$ ifadesinin doğru olduğunu görüp $A \subseteq A \cap B$ ifadesinin her zaman doğru olmak zorunda olmadığını göremiyorsanız bu konuya daha fazla vakit ayırmalısınız).

Bir sonraki örnekte $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ olduğunu göstereceğiz. İspata başlamadan önce, bunun gerçekten de mantıklı olup olmadığına dair bir örnek verelim. Kabul edelim ki $A = \{1,2\}$ ve $B = \{2,3\}$ olsun. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \\
&= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ ile verilir. Böylece özel olarak seçilen A ve B için $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \neq \mathscr{P}(A \cup B)$ olsa bile $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ ifadesi doğrudur. Şimdi A ve B ne olursa olsun $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ önermesinin her zaman doğru olduğunu gösterelim.

Örnek 8.8 Eğer A ve B iki küme ise $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $X \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ olsun.
Birleşim tanımına göre $X \in \mathscr{P}(A)$ veya $X \in \mathscr{P}(B)$ yazılabilir.
Kuvvet kümesi tanımından $X \subseteq A$ veya $X \subseteq B$ olur.
Şimdi, bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.
1. Durum $X \subseteq A$ ise $X \subseteq A \cup B$ olur. Bu da $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$ anlamına gelir.
2. Durum $X \subseteq B$ ise $X \subseteq A \cup B$ olur. Bu da $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$ anlamına gelir.
($X \subseteq A$ *ve* $X \subseteq B$ durumunu dikkate almak gerekmez. Çünkü 1. veya 2. durum bunu kapsar). Yukarıdaki iki durum, $X \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, $X \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ olması $X \in \mathscr{P}(A \cup B)$ olmasını gerektirir. Böylece $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ önermesinin ispatı tamamlanmıştır. ■

Bir sonraki örnekte, koşullu bir önermeyi ispatayacağız. Doğrudan ispat yapacağımız bu süreçte, $A \subseteq B$ ifadesini standart yöntemle göstereceğiz.

Örnek 8.9 Eğer A ile B iki küme ve $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ ise $A \subseteq B$ olur.

İspat. Doğrudan ispat yapalım. Kabul edelim ki $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ olsun.
Bu varsayıma dayalı olarak $A \subseteq B$ olduğunu göstermek gerekir.
$A \subseteq B$ olduğunu göstermek için $a \in A$ olduğunu kabul edelim.
Tek elemanlı $\{a\}$ kümesi A'nın bir altkümesi olduğu için $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$ olur.
Üstelik $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ olduğu için $\{a\} \in \mathscr{P}(B)$ bulunur.
Bu ise $\{a\} \subseteq B$ yani $a \in B$ anlamına gelir.
O hâlde $a \in A$ olması $a \in B$ olmasını gerektirir.
Sonuç olarak $A \subseteq B$ olur. ■

8.3 "$A = B$" Önermesi Nasıl İspatlanır

İspatlarda çoğu zaman iki kümenin eşit olduğunu göstermek gerekir. Bunu yapmak için standart bir yol vardır. Örneğin $A = B$ olduğunu göstermek istediğimizi varsayalım. Eğer $A \subseteq B$ olduğunu gösterirsek A'nın her elemanı, B'nin de bir elemanı olur. Ancak B'de olup da A'da olmayan elemanlar olabilleceği için buradan $A = B$ çıkarımı yapılamaz. Buna *ek olarak* eğer $B \subseteq A$ olduğunu gösterirsek B kümesi, A'da olmayan bir elemanı içeremez. Böylece $A = B$ olur. O hâlde $A = B$ önermesini ispatlamanın standart yolu $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğunu göstermektir.

"$A = B$" nasıl ispatlanır

İspat.
[$A \subseteq B$ olduğu ispatlanır.]
[$B \subseteq A$ olduğu ispatlanır.]
Sonuç olarak $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğu için $A = B$ olur. ■

Örnek 8.10 $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. İlk önce $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olsun. Buna göre $35 \mid a$ olur. Yani $a = 35c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $a = 5(7c)$ ve $a = 7(5c)$ yazılabilir. Eğer $a = 5(7c)$ ise $5 \mid a$ ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ olur. Eğer $a = 7(5c)$ ise $7 \mid a$ ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olur. Buna göre a elemanı hem $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ hem de $\{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ kümesine aittir. O hâlde $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ bulunur. Sonuç olarak $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olmalıdır.

Şimdi $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olsun. Kesişim tanımından $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ ve $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ yazılabilir. Buradan $5 \mid a$ ve $7 \mid a$ bulunur. Buna göre $a = 5c$ ve $a = 7d$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır. 5 ve 7 tamsayıları

a'nın asal çarpanlarıdır. O hâlde a'nın asal ayrışımı 5 ve 7 tamsayılarını içerir. Buna göre $5 \cdot 7 = 35$ tamsayısı a'yı böler ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 35|n\}$ bulunur. Sonuç olarak $\{n \in \mathbb{Z} : 5|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35|n\}$ olmalıdır.

Bu noktaya kadar $\{n \in \mathbb{Z} : 35|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7|n\}$ ve $\{n \in \mathbb{Z} : 5|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7|n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35|n\}$ olduğunu gösterdik. Böylece $\{n \in \mathbb{Z} : 35|n\} = \{n \in \mathbb{Z} : 5|n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7|n\}$ olduğunu ispatladık. ■

Cebir derslerinden bildiğiniz üzere eğer $ac = bc$ ve $c \neq 0$ ise $a = b$ olur. Bir sonraki örnekte, bu önermenin bir benzerini A, B ve C kümeleri için ispatlayalım. Bu örnek, bizden koşullu bir önermeyi ispatlamamızı isteyecektir. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Bu süreçte, öğrendiğimiz yeni yöntemleri kullanmamız gerekecektir.

Örnek 8.11 Kabul edelim ki A, B ve C üç küme ve $C \neq \emptyset$ olsun. Eğer $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. $A \times C = B \times C$ olsun. Buna göre $A = B$ olduğunu göstermeliyiz.

İlk önce $A \subseteq B$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in A$ olsun. $C \neq \emptyset$ olduğu için en az bir $c \in C$ vardır. Kartezyen çarpım tanımından $(a,c) \in A \times C$ yazılabilir. Fakat $A \times C = B \times C$ olduğu için $(a,c) \in B \times C$ ve buradan da $a \in B$ bulunur. O hâlde $a \in A$ olması $a \in B$ olmasını gerekir. Buna göre $A \subseteq B$ olur.

Şimdi $B \subseteq A$ olduğunu gösterelim. Bunun için yukarıda kullandığımız argümandaki A ve B kümelerinin rollerini değiştirelim. Kabul edelim ki $a \in B$ olsun. $C \neq \emptyset$ olduğu için en az bir $c \in C$ vardır. Buna göre $(a,c) \in B \times C$ yazılabilir. Fakat $B \times C = A \times C$ olduğu için $(a,c) \in A \times C$ ve buradan da $a \in A$ bulunur. O hâlde $a \in B$ olması $a \in A$ olmasını gerekir. Buna göre $B \subseteq A$ olur.

Yukarıdaki iki paragraf, $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğunu gösterir. Buradan $A = B$ bulunur. Özetleyecek olursak eğer $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olduğunu gösterdik. Böylece ispat tamamlamıştır. ■

Kümeler üzerinde tanımlı işlemlerinin, sayılar üzerindeki işlemlere olan benzerliklerine bir başka açıdan bakalım. Cebirden, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ile verilen dağılma özelliğine aşina olmalısınız. Şimdi a, b, c sayılarını A, B, C kümeleriyle; $\cdot$ işlemini $\times$ ile; $+$ işlemini de $\cap$ ile değiştirelim. Buna göre $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olur. Şimdi bunun doğru olduğunu gösterelim.

Örnek 8.12 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. İlk önce $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ olduğunu gösterelim.
Kabul edelim ki $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ olsun.
Kartezyen çarpım tanımından $a \in A$ ve $b \in B \cap C$ olur.
Kesişim tanından $b \in B$ ve $b \in C$ olur.

Şimdi $a \in A$ ve $b \in B$ olduğu için ($\times$ tanımından) $(a,b) \in A \times B$ bulunur.
Aynı şekilde $a \in A$ ve $b \in C$ olduğu için ($\times$ tanımından) $(a,b) \in A \times C$ bulunur.
Böylece $(a,b) \in A \times B$ ve $(a,b) \in A \times C$ olduğu için $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olur.
O hâlde $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ olması $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olmasını gerektirir.
Böylelikle $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ elde edilir.

Şimdi $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ olduğunu gösterelim.
Kabul edelim ki $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olsun.
Kesişim tanımına göre $(a,b) \in A \times B$ ve $(a,b) \in A \times C$ olur.
Kartezyen çarpım tanımına göre $(a,b) \in A \times B$ ise $a \in A$ ve $b \in B$ olur.
Kartezyen çarpım tanımına göre $(a,b) \in A \times C$ ise $a \in A$ ve $b \in C$ olur.
Yukarıda $b \in B$ ve $b \in C$ olduğu için kesişim tanından $b \in B \cap C$ bulunur.
Buna göre $a \in A$ ve $b \in B \cap C$ olduğu için $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ elde edilir.
Özetle $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olması $(a,b) \in A \times (B \cap C)$ olmasını gerektirir.
Böylelikle $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ elde edilir.

Yukarıda $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ ve $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ olduğu gösterilmiştir. Böylece $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olur. ■

Bazen iki kümenin eşit olduğunu göstermek için birine çeşitli işlemler uygulanarak diğerine dönüştürülür. Bu yöntem, iki cebirsel ifadenin eşit olduğunu göstermek için birinin belirli işlemlere tabi tutularak diğerinin elde edilmesine benzer. Alternatif bir çözüm sunmak için önceki örneği bu yöntemle çözelim. Burada uyarmak gerekirse bu yaklaşım her zaman uygulanamayabilir ancak uygulanabildiği zaman ispatı önemli ölçüde kısaltır.

Örneğe başlamadan önce önemli bir noktaya değinelim. Herhangi bir P önermesi, mantıksal olarak $P \wedge P$ önermesine denktir. (Bundan şüphe duyarsanız, doğruluk tablolarına bakabilirsiniz). Aşağıdaki örneğin bir noktasında $x \in A$ ifadesi, ona denk olan $(x \in A) \wedge (x \in A)$ ifadesiyle değiştirilecektir.

Örnek 8.13 Herhangi A, B ve C kümeleri için $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ önermesini ispatlayınız.

İspat. Aşağıdaki eşitlikleri inceleyiniz:

$$
\begin{array}{rcll}
A \times (B \cap C) & = & \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B \cap C)\} & (\times \text{ tanımı}) \\
& = & \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} & (\cap \text{ tanımı}) \\
& = & \{(x,y) : (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} & (P = P \wedge P) \\
& = & \{(x,y) : \big((x \in A) \wedge (y \in B)\big) \wedge \big((x \in A) \wedge (y \in C)\big)\} & (\text{düzenleme}) \\
& = & \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\} \cap \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in C)\} & (\cap \text{ tanımı}) \\
& = & (A \times B) \cap (A \times C) & (\times \text{ tanımı})
\end{array}
$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ eşitliğili, matematikle uğraştığınız sürece sıklıkla kullanacağınız temel bir kanundur. Buna benzer bazı eşitlikler aşağıda listelenmiştir. Alıştırmalar kısmında kanıtlamanız istenilen bu eşitliklerin herbiri, bu bölümünde verilen yöntemler ile ispatlanabilir.

$$\left.\begin{aligned}\overline{A\cap B}&=\overline{A}\cup\overline{B}\\ \overline{A\cup B}&=\overline{A}\cap\overline{B}\end{aligned}\right\}\text{ Kümeler için DeMorgan kuralları}$$

$$\left.\begin{aligned}A\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\ A\cup(B\cap C)&=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\times(B\cup C)&=(A\times B)\cup(A\times C)\\ A\times(B\cap C)&=(A\times B)\cap(A\times C)\end{aligned}\right\}\text{ Kümeler için dağılma kuralları}$$

Pratik yapmak için bu eşitlikleri ispatlayabilirsiniz. Öğrenme stilinize bağlı olarak bunları akılda tutmanız gerekmez ancak tamamen unutmanız da tavsiye edilmez. Bu denklemler, matematik eğitiminizin ilerideki aşamalarında yararlı olabilir. İhtiyaç duyduğunuzda bunlara dönüp bakabilir ya da kendi başınıza türetebilirsiniz. Eğer yoğunlaşarak matematik çalışmaya devam ederseniz farkında bile olmadan bunları özümsediğinizi görürsünüz.

8.4 Örnek: Mükemmel Sayılar

Bazen iki kümenin eşit olduğunu veya birinin diğerinin altkümesi olduğunu göstermek için iyi bir çalışma ve yaratıcılık gerekir. Şimdi bunu mükemmel sayılar adı verilen sayılar teorisi örnekleriyle görelim. 2000 yıldan fazla bir geçmişe sahip olan bu konunun bugün bile cevaplanmamış kısımları vardır.

Bu problem, bir doğal sayının pozitif bölenlerinin toplamı ile ilgilenir. Konuya, 12'nin bölenlerini ele alarak başlayalım. 12'nin kendisinden küçük olan pozitif bölenlerinin toplamı $1+2+3+4+6=16$ olur ki bu toplam 12'den büyüktür. Aynı iş 15 için yapılarak $1+3+5=9$ bulunur. Bu toplam ise 15'ten küçüktür. Çoğu zaman bir p doğal sayısının kendisinden küçük olan pozitif bölenlerinin toplamı p'den ya daha azdır ya da daha fazladır. Ancak bazen bölenlerin toplamı p olur. Bu durumda p'ye *mükemmel sayı* denir.

Tanım 8.1 Kendisinden küçük pozitif tam bölenlerinin toplamı yine kendisine eşit olan bir p doğal sayısına **mükemmel sayı** denir. Örneğin:

- $6=1+2+3$ olduğu için 6 mükemmeldir.
- $28=1+2+4+7+14$ olduğu için 28 mükemmeldir.
- $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$ olduğu için 496 mükemmeldir.

Deneme-yanılma yoluyla bulmak çok vakit alsa da 496'dan sonraki mükemmel sayı 8128'dir. Bunu şu şekilde doğrulayabiliriz. Bu sayının bölenleri 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 ve 4064'tür. Gerçekten de

$$8128 = 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064.$$

Bunların dışında mükemmel sayı var mıdır, varsa bunlar nasıl bulunur, bunlar herhangi bir örüntüye sahip midir? Bu sorular, eski Yunan matematikçilerini cezbetmiştir. Şimdi, Öklid tarafından kayda geçirilen ve bu soruları kısmen cevaplayan bir fikirden bahsedelim. Öklid, kümeler teorisi icat edilmeden iki bin yıldan daha fazla bir süre önce yaşadığı için kümeleri kullanmamıştır. Yine de biz onun fikirlerini kümeler dilinde ifade edelim.

Amacımız hangi sayıların mükemmel olduğunu anlamaktır. Bunun için

$$P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ mükemmel sayı}\}$$

kümesini tanımlayalım. Buna göre $P = \{6, 28, 496, 8128, \ldots\}$ olur. Fakat P kümesinin burada listelenen sayılar dışındaki elmanları belirsizdir. P kümesinin içerdiği elemanlar hakkında daha fazla bilgi edinmek için aşağıdaki A kümesini inceleyeceğiz. Bu küme P kümesinden daha karmaşık görünebilir. Ancak birazdan göreceğimiz üzere P'yi anlamaya yardımcı olacaktır.

$$A = \{2^{n-1}(2^n-1) : n \in \mathbb{N} \text{ ve } 2^n-1 \text{ asal sayı}\}$$

Bu kümeyi sözel olarak ifade edelim: 2^n-1 asal olmak üzere A kümesi, $2^{n-1}(2^n-1)$ formundaki doğal sayılardan oluşur. A kümesine ait olan sayılar hakkında bir fikir edinmek için aşağıdaki tabloya bakalım. Bu tablo, n doğal sayılarına karşılık gelen 2^{n-1} ve 2^n-1 sayılarını listeler. Eğer 2^n-1 asalsa $2^{n-1}(2^n-1)$ çarpımı tabloda verilmiştir. Aksi hâlde bu kısım $*$ ile işaretlenmiştir.

n	2^{n-1}	2^n-1	$2^{n-1}(2^n-1)$
1	1	1	$*$
2	2	3	6
3	4	7	28
4	8	15	$*$
5	16	31	496
6	32	63	$*$
7	64	127	8128
8	128	255	$*$
9	256	511	$*$
10	512	1023	$*$
11	1024	2047	$*$
12	2048	4095	$*$
13	4096	8191	33.550.336

A kümesinin ilk dört elemanı olan 6, 28, 496 ve 8128 sayıları mükemmeldir. Bu noktada hemen $A = P$ sonucuna varmak isteyebilirsiniz. Ancak 2000 yıldan fazla bir süredir hiç kimsenin $A = P$ olup olmadığını belirleyememesi şok edici bir gerçektir. Şimdilik sadece $A \subseteq P$ olduğu bilinmektedir. Birazdan bunu göstereceğiz. Bir başka deyişle A kümesindeki her elemanın mükemmel olduğunu göstereceğiz. (Yapacağımız ispat, P kümesinde olup A kümesinde olmayan mükemmel sayıların var olma olasılığını açık bırakır.)

İspatın ana unsuru, ortak oranı r olan geometrik bir serinin toplam formülüne dayanır. Muhtemelen en son Analiz II'de gördünüz bu formül

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

ile verilir. Özel olarak $r = 2$ için

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1 \tag{8.1}$$

elde edilir. (Bu formülün ispatı için Bölüm 7.4'deki 19. alıştırmanın çözümüne bakabilirsiniz.) Artık ispatı yapmaya hazırız. Önemine dikkat çekmek için bunu bir önermeden ziyade teorem olarak adlandıralım.

Teorem 8.1 Kabul edelim ki $A = \{2^{n-1}(2^n-1) : n \in \mathbb{N} \text{ ve } 2^n-1 \text{ asal sayı}\}$ ve $P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ mükemmel sayı}\}$ olsun. Bu durumda $A \subseteq P$ olur.

İspat. A ve P belirtildiği gibi olsun. $A \subseteq P$ olduğunu göstermek için $p \in A$ iken $p \in P$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $p \in A$ olsun. A kümesinin tanımdan, n bir doğal sayı ve $2^n - 1$ bir asal sayı olmak üzere

$$p = 2^{n-1}(2^n-1) \tag{8.2}$$

yazılabilir. Amacımız, $p \in P$ yani p'nin mükemmel olduğunu göstermektir. Buna göre p'nin kendisinden küçük olan pozitif bölenlerinin toplamının p olduğunu göstermemiz gerekir. Dikkat edilirse $2^n - 1$ asaldır. Bu yüzden $0 \le k \le n-1$ olmak üzere $2^{n-1}(2^n-1)$ sayısının her böleni 2^k veya $2^k(2^n-1)$ formundadır. Buna göre p'nin pozitif bölenleri aşağıda listelenmiştir:

$$\begin{array}{llllll} 2^0, & 2^1, & 2^2, & \ldots & 2^{n-2}, & 2^{n-1}, \\ 2^0(2^n-1), & 2^1(2^n-1), & 2^2(2^n-1), & \ldots & 2^{n-2}(2^n-1), & 2^{n-1}(2^n-1). \end{array}$$

Dikkat edileceği üzere bu liste $2^0 = 1$ ile başlar ve $2^{n-1}(2^n-1) = p$ ile biter.

Yukarıdaki listenin sonuncu (yani p) hariç diğer elemanları toplanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k(2^n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + (2^n-1)\sum_{k=0}^{n-2} 2^k \\
&= (2^n-1)+(2^n-1)(2^{n-1}-1) && \text{(Eşitlik 8.1)} \\
&= \left[1+(2^{n-1}-1)\right](2^n-1) \\
&= 2^{n-1}(2^n-1) && \text{(Eşitlik 8.2)} \\
&= p
\end{aligned}$$

bulunur. O hâlde p tamsayısının kendisinden farklı pozitif bölenlerinin toplamı yine kendisine eşitir. Mükemmel sayı tanımına göre p mükemmeldir. Buna göre P kümesinin tanımından $p \in P$ elde edilir.

Sonuç olarak $p \in A$ olduğunda $p \in P$ olmalıdır. Böylece $A \subseteq P$ bulunur. ■

Önceki sayfadaki tablo ile birleştirildiğinde bu teorem yeni bir mükemmel sayı verir! A kümesindeki $p = 2^{13-1}(2^{13}-1) = 33.550.336$ mükemmeldir.

Dikkat edilirse A kümesindeki her eleman, 2'nin bir kuvvetinin katıdır. Bu nedenle A çift sayılardan oluşur. Ancak bu ille de her mükemmel sayının çift olacağı anlamına gelmez çünkü sadece $A \subseteq P$ olduğu gösterilmiştir. Bu, $A = P$ anlamına gelmez. Tek bildiğimiz şey, A kümesinde olmayan ancak $P - A$ kümesinde olan mükemmel tek sayıların var olma ihtimalidir.

Tek olan mükemmel sayı var mıdır? Bu sorunun cevabı bilinmemektedir.

2000 yıldan fazla bir süredir kimse ne tek olan bir mükemmel sayı bulabilmiş ne de bunların olmadığını gösterebilmiştir. Fakat A kümesinin bütün *çift* mükemmel sayıları içerdiği *bilinmektedir*. Bu sonuç ilk defa Euler tarafından ispatlanmıştır. Şimdi, *çift* olan mükemmel sayıların kümesini E ile gösterelim ve *Euler*'in takip ettiği yolu kullanarak $A = E$ olduğunu ispatlayalım. Bu örnek, iki kümenin eşit olduğunun nasıl ispatlanacağını göstermesi açısından iyi bir örnektir.

İşleri kolaylaştırmak için mükemmel sayıların biraz farklı bir tanımını kullanalım ve bütün pozitif bölenlerinin toplamı $2p$ olan bir p doğal sayısına **mükemmel** sayı diyelim. Örneğin 6 mükemmeldir çünkü $1+2+3+6 = 2 \cdot 6$ olur. Bu tanım, önceki tanımdan daha sadedir çünkü pozitif bölenlerin p'den *küçük* olma şartı yoktur. Bunun yerine, bölenlerin arasına p eklenmektedir. Bu iş, toplamı p kadar arttırır yani iki katına çıkarır.

Teorem 8.2 Kabul edelim ki $A = \{2^{n-1}(2^n-1) : n \in \mathbb{N} \text{ ve } 2^n - 1 \text{ asal sayı}\}$ ve $E = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ mükemmel ve çift sayı}\}$ olsun. Bu durumda $A = E$ olur.

İspat. $A = E$ olduğunu ispatlamak için $A \subseteq E$ ve $E \subseteq A$ gösterilmelidir.

İlk önce $A \subseteq E$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p \in A$ olsun. A kümesinin her elemanı 2'nin bir kuvvetinin katı olduğu için p çifttir. Buna ek olarak p mükemmeldir çünkü Teorem 8.1 gereğince A'nın her elemanı P'nin de bir elemanıdır. O hâlde p hem mükemmeldir hem de çifttir. Buna göre $p \in E$ olur. Buradan $A \subseteq E$ elde edilir.

Şimdi $E \subseteq A$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p \in E$ olsun. Buna göre p hem çifttir hem de mükemmeldir. Şimdi p tamsayısını $p = 2^k 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \cdots$ şeklinde asal çarpanlarına ayıralım. Buradaki $n_1, n_2, n_3, \ldots$ kuvvetlerinden bazıları 0 olabilir. Ancak p çift olduğu için k sıfırdan büyüktür. O hâlde $p = 2^k q$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı ve q tek tamsayısı vardır. Buradaki amacımız, $p \in A$ yani $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$ formunda yazılabileceğini göstermektir. Bu nedenle $p = 2^k q$ ifadesini bu forma benzetmek için $n = k + 1$ seçerek

$$p = 2^{n-1} q \tag{8.3}$$

yazabiliriz. Şimdi, q tamsayısının pozitif bölenleri $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m$ olsun. (Burda, $d_1 = 1$ ve $d_m = q$ olur.) Buna göre p tamsayısının bölenlerini yazalım:

$$\begin{array}{ccccc}
2^0 d_1 & 2^0 d_2 & 2^0 d_3 & \ldots & 2^0 d_m \\
2^1 d_1 & 2^1 d_2 & 2^1 d_3 & \ldots & 2^1 d_m \\
2^2 d_1 & 2^2 d_2 & 2^2 d_3 & \ldots & 2^2 d_m \\
2^3 d_1 & 2^3 d_2 & 2^3 d_3 & \ldots & 2^3 d_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2^{n-1} d_1 & 2^{n-1} d_2 & 2^{n-1} d_3 & \ldots & 2^{n-1} d_m
\end{array}$$

Bu bölenlerin toplamı $2p$ olmalıdır çünkü p mükemmeldir. Eşitlik 8.3'den $2p = 2(2^{n-1})q = 2^n q$ elde edilir. Yukarıdaki bölenler sütün sütün toplanarak

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_3 + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_m = 2^n q$$

yazılabilir. Bu toplamdaki terimlere Eşitlik 8.1 uygulanarak

$$\begin{aligned}
(2^n - 1)d_1 + (2^n - 1)d_2 + (2^n - 1)d_3 + \cdots + (2^n - 1)d_m &= 2^n q \\
(2^n - 1)(d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m) &= 2^n q \\
d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m &= \frac{2^n q}{2^n - 1}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m = \frac{(2^n - 1 + 1)q}{2^n - 1} = \frac{(2^n - 1)q + q}{2^n - 1} = q + \frac{q}{2^n - 1}.$$

Son terime göre $\frac{q}{2^n-1}$ bir tamsayı olmalıdır. Buna göre q ve $\frac{q}{2^n-1}$ tamsayıları q'nun pozitif bölenleridir. Bu ikisinin toplamı, q'nun *tüm* pozitif bölenlerinin toplamına eşittir. O hâlde q'nun sadece iki pozitif böleni vardır: q ve $\frac{q}{2^n-1}$. Bir sayının pozitif bölenlerinden biri 1 olmalıdır. Buradan $\frac{q}{2^n-1} = 1$ ve böylece $q = 2^n - 1$ bulunur. Üstelik, sadece iki tane pozitif böleni olan bir tamsayı asaldır. Bu nedenle $q = 2^n - 1$ asaldır. Eşitlik 8.3'de $q = 2^n - 1$ yazılarak $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$ bulunur. A kümesinin tanımı gereğince $p \in A$ olduğu açıktır. O hâlde $p \in E$ olması $p \in A$ olmasını gerektirir. Böylece $E \subseteq A$ elde edilir.

Sonuç olarak $A \subseteq E$ ve $E \subseteq A$ olduğu için $A = E$ bulunur. ■

Böyle bir ispatı kendi başınıza düşünemediyseniz hemen paniğe kapılmayın. Bu yaklaşımı keşfetmek Euler gibi birinin dehalığını gerektirir.

Bu üniteyi, mükemmel sayılarla ilgili bir takım gözlemlerle bitirelim.

- Altıncı mükemmel sayı: $p = 2^{17-1}(2^{17} - 1) = 8589869056$.
- Yedinci mükemmel sayı: $p = 2^{19-1}(2^{19} - 1) = 137438691328$.
- Sekizinci mükemmel sayı: $p = 2^{31-1}(2^{31} - 1) = 2305843008139952128$.
- Yirminci mükemmel sayı: $p = 2^{4423-1}(2^{4423} - 1)$. (2663 basamaklı)
- Yirmi üçüncü mükemmel sayı: $p = 2^{11213-1}(2^{11213} - 1)$. (6957 basamaklı)
- Ellinci mükemmel sayı: $p = 2^{77.232.917-1}(2^{77.232.917} - 1)$.

Daha önce belirtildiği üzere tek ve mükemmel bir sayının olup olmadığını kimse bilmemektedir. Üstelik mükemmel sayıların sonlu ya da sonsuz sayıda olup olmadığı bile bilinmemektedir. Ancak çift olan mükemmel sayıların son rakamlarının 6 veya 8 **olduğu** bilinmektedir. Muhtemelen bunu kanıtlamak hoşunuza gidebilir.

Mükemmel sayılarla yakından bir ilişkisi olan $2^n - 1$ formundaki asal sayılarla **Mersenne asalları** denir. Bu sayılara verilen isim, onları popüler yapan Fransız bilim adamı Marin Mersenne'den (1588-1648) gelir. İlk birkaç Mersenne asalı $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ ve $2^{13} - 1 = 8191$ ile verilir. Günümüze sadece 51 tane Mersenne asalının var olduğu bilinmektedir ve bunların en büyüğü $2^{82.589.933} - 1$ sayısıdır. Mersenne asallarından 52'ncisini bulana büyük bir para ödülü vaat edilmiştir. (Bkz: https://www.mersenne.org/.) Muhtemelen alıştırmalar konusundaki şansını daha iyidir.

Ünite 8 Alıştırmaları

Bu ünitede verilen yöntemleri kullanarak aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

1. $\{12n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
2. $\{6n : n \in \mathbb{Z}\} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
3. Eğer $k \in \mathbb{Z}$ ise $\{n \in \mathbb{Z} : n \mid k\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \mid k^2\}$ olur.
4. Eğer $m, n \in \mathbb{Z}$ ise $\{x \in \mathbb{Z} : mn \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : m \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : n \mid x\}$ olur.
5. Eğer p, q pozitif tamsayılar ise $\{pn : n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ olur.
6. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $A - C \subseteq B - C$ olur.
7. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $B \subseteq C$ ise $A \times B \subseteq A \times C$ olur.
8. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur.
9. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur.
10. Eğer A ve B kümelerinin evrensel kümesi E ise $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olur.
11. Eğer A ve B kümelerinin evrensel kümesi E ise $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ olur.
12. Eğer A, B ve C üç küme ise $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ olur.
13. Eğer A, B ve C üç küme ise $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ olur.
14. Eğer A, B ve C üç küme ise $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ olur.
15. Eğer A, B ve C üç küme ise $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ olur.
16. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ olur.
17. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olur.
18. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ olur.
19. $\{9^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ancak $\{9^n : n \in \mathbb{Z}\} \neq \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
20. $\{9^n : n \in \mathbb{Q}\} = \{3^n : n \in \mathbb{Q}\}$ olduğunu ispatlayınız.
21. A ve B iki küme olsun. $A \subseteq B$ ancak ve ancak $A - B = \emptyset$ olduğunu ispatlayınız.
22. A ve B iki küme olsun. $A \subseteq B$ ancak ve ancak $A \cap B = A$ olduğunu ispatlayınız.
23. Eğer $A_a = \{(x, a(x^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ ise $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} A_a = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ olduğunu ispatlayınız.
24. $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} [3 - x^2, 5 + x^2] = [3, 5]$ olduğunu ispatlayınız.
25. A, B, C, D kümeleri verilsin. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ olduğunu ispatlayınız.
26. $\{4k + 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{4k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
27. $\{12a + 4b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \{4c : c \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
28. $\{12a + 25b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ olduğunu ispatlayınız.
29. $A \neq \emptyset$ olsun. $A \times B \subseteq A \times C$ ancak ve ancak $B \subseteq C$ olduğunu ispatlayınız.
30. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.
31. $B \neq \emptyset$ ve $A \times B \subseteq B \times C$ olsun. Buna göre $A \subseteq C$ olduğunu ispatlayınız.

ÜNİTE 9

Aksini İspat

Ünite 4'ten bu noktaya kadar şu ana tema üzerinde durduk: Verilen bir önermenin doğru olduğunu ispatlayınız. Her örnekte ve alıştırmada, doğru bir önerme verildi ve biz onu ispatlamaya çalıştık. Eğer ispatlamamız için *yanlış* bir önerme verilmiş olsaydı, ne olacağını hiç merak ettiniz mi? Bunun cevabı, hiçbir (doğru) ispatın mümkün olamayacağıdır. Eğer olsaydı bu önerme zaten yanlış değil doğru olurdu.

Ancak birilerini, verilen bir önemenin yanlış olduğuna dair nasıl ikna edebiliriz? Bir önermeyi ispatlayamamak, onun otomatik olarak yanlış olduğu anlamına gelmez. İspatı yapmak sizin (ve belki herkes) için zor olabilir. Aslında bir önermenin yanlış olduğunu ispatlamaya yarayan çok basit ve oldukça ikna edici bir yöntem vardır. Bu yöntem, **aksini ispat** veya **çürütme** olarak adlandırılır. Bu ünitede, verilen bir önermenin **aksini ispatlamakla** ilgileneceğiz.

Bu yöntemi açıklamadan önce onunla ilgili bilgileri verelim. Aşağıda açıklandığı gibi matematiksel önermeler üç kategoride toplanabilir.

Bir tarafta, doğru olduğu ispatlanan önermelerden oluşan kategori bulunur. Çoğu zaman bu önermeler yeterince kayda değerdir ve bunlara "teorem," "önerme," "lemma" ve "sonuç" isimleri verilir. Bu kategoride yer alan önermelerin bazıları, bir sonraki sayfada verilen diyagramın sol tarafındaki kutuda listelenmiştir. Ayrıca bu kategoride ($2 = 2$ gibi) ilgi çekmeyen önermeler de bulunur. Herkes bunların doğru olduğunu bilir ancak onlara "teorem" veya "önerme" gibi isimler vermeye tenezzül etmez.

Öbür tarafta, yanlış olduğu bilinen önermelerden oluşan kategori vardır. Bu kategorinin örnekleri sağ tarafdaki kutuda listelenmiştir. Matematikçiler, yanlış önermelerle pek ilgilenmez. Bu nedenle onlara "yanlış önerme" dışında özel bir isim verilmemiştir.

Fakat bu iki uç arasında kalan (ve oldukça ilginç) üçüncü bir kategori vardır. Bu kategori, doğru ya da yanlış olduğu henüz tespit edilememiş önermelerden oluşur. Örneğin *"Her mükemmel sayı çifttir."* veya *"2'den büyük olan her çift tamsayı, iki tane asal sayının toplamıdır."* önermeleri bu kategoriye aittir. (İkinci önerme *Goldbach sanısı* olarak adlandırılır. Bkz:

Bölüm 2.1) Matematikçiler, bu kategoride olan ve doğru olduğunu tahmin ettikleri (ama henüz ispatlayamadıkları) ifadeler için özel bir isim kullanır. Bu türdeki bir ifadeye **sanı** denir.

Üç Önerme Türü

Doğru Olduğu Bilinenler (Teoremler & Önermeler)	**Doğru Olduğu Bilinmeyenler** (Sanılar)	**Yanlış Olduğu Bilinenler**
Örnekler: • Pisagor teoremi • Fermat'ın son teoremi (Bölüm 2.1) • Tek sayıların kareleri tektir. • $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır.	Örnekler: • Her mükemmel sayı çifttir. • 2'den büyük her çift tamsayı iki asal sayının toplamıdır. (Goldbach sanısı, Bölüm 2.1) • Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $2^n - 1$ formunda sonsuz sayıda asal sayı vardır.	Örnekler: • Bütün asal sayılar tektir. • İkinci dereceden bazı denklemlerin üç çözümü vardır. • $0 = 1$. • $a^3 + b^3 = c^3$ denklemini sağlayan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vardır.

Matematikçiler, zamanlarının ve enerjilerinin çoğunu sanıları ispatlamak ya da çürütmek için harcar. (Ayrıca sezgiye veya toplanan bulgulara dayalı olarak yeni sanılar oluşturmak için de önemli bir miktarda zihinsel çaba sarf eder.) Yeteri miktarda ilgi çekici bir sanı ispatlandığında (veya çürütüldüğünde), ispat ya da aksinin ispatı genellikle bilimsel bir dergide yayınlanır. Eğer ispatlanırsa bu sanı bir teorem veya bir önerme statüsünü kazanır. Eğer çürütülürse önemini kaybeder çünkü matematikçiler yanlış ifadelerle ilgilenmez. (Eğer özel olarak bir önem atfedilmişse çürütülen bazı sanılar, öğretici veya merak uyandırıcı örnekler olarak görülebilir.)

Matematikçileri ilgilendiren sanıların çoğunu ispatlamak ya da çürütmek oldukça zordur. Biz henüz o seviyede değiliz. Bu kitapta karşılaşacağınız "sanılar" deneyimli bir matematikçinin baktığında, onların doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu hemen görebileceği seviyededir. Fakat onları ispatlamak ya da çürütmek için sizin biraz uğraşmanız gerekebilir. Ama ileri düzeydeki matematik sanılarını saran gizem bulutuyla uyumlu olarak, bu bölümdeki (ve sonrasındaki) alıştırmaların doğruluğu ya da yanlışlığı konusuna herhangi bir ipucu vermeden onları ispatlamanız veya çürütmeniz istenecektir. Onların doğru olup olmadığına karar vermek ve onları ispatlamak veya çürütmek sizin işinizdir. Bu ünitedeki örnekler, bir önermenin doğru ya da yanlış olduğuna karar vererek onu ispatlama veya çürütme sürecinde bir kişinin başından geçenleri gösterir.

Bir önermeyi kanıtlamak için üç tane yöntem biliyoruz: doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi. Artık bir önermeyi çürütme yani aksini ispatlama yöntemine hazırız. Şimdi bir P önermesinin aksini ispatlamak istediğimizi varsayalım. Bir başka deyişle P önermesinin *yanlış* olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bunun için $\sim P$ önermesinin *doğru* olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $\sim P$ doğru ise P yanlıştır.

Özet: P önermesi nasıl çürütülür: $\sim P$ önermesi ispatlanır.

Bu yaklaşım son derece basittir. P önemesini çürütmek için $\sim P$ ispatlanır. Teorik olarak bu iş doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle yapılabilir. Ancak pratikte, koşullu veya evrensel olarak nicelenmiş bir önermeyi ispatlarken işler biraz daha kolay olabilir. Bir sonraki konumuz bununla ilgilidir.

9.1 Evrensel Önermelerin Çürütülmesi: Aksine Örnek

Bir sanı, teorem olması ümit edilen bir önerme olarak düşünülebilir. Bilindiği üzere birçok teorem (ve dolayısıyla da birçok sanı) evrensel olarak nicelenmiş önermedir. Bu nedenle konuya evrensel nicelenmiş

$$\forall x \in S, P(x)$$

önermesinin nasıl çürütüleceğini araştırarak başlayalım. Bu önermeyi çürütmek için onun olumsuzunu yani

$$\sim(\forall x \in S, P(x)) \quad = \quad \exists x \in S, \sim P(x)$$

varlık önermesini ispatlamak gerekir. Bunun için de $\sim P(x)$ önermesini doğrulayan yani $P(x)$ önermesini yanlış yapan bir $x \in S$ *örneği* üretilmelidir. Buna göre evrensel olarak nicelenmiş bir önermeyi çürütmek için yapılması gerekenler aşağıda özetlenmiştir.

Özet: $\forall x \in S, P(x)$ **önermesi nasıl çürütülür**

$P(x)$ yanlış olacak şekilde bir $x \in S$ örneği üretilir.

Eğer aksi ispatlanmak istenen önerme $P(x) \Rightarrow Q(x)$ koşullu önermesi ise işler daha da kolaydır. Burada, $P(x)$ önermesini doğrulayan her x için $Q(x)$

önermesinin de doğru olacağı iddia edilmektedir. O hâlde $P(x)$ doğru fakat $Q(x)$ yanlış olacak şekilde bir x var ise bu koşullu önerme yanlıştır. Buna göre $P(x) \Rightarrow Q(x)$ önermesini çürütmek için aşağıdaki özet verilebilir.

> **Özet:** $P(x) \Rightarrow Q(x)$ **önermesi nasıl çürütülür**
> $P(x)$ doğru fakat $Q(x)$ yanlış olacak şekilde bir x örneği üretilir.

Yukarıdaki özetlerin her ikisine göre de verilen bir önermeyi çürütmek için onun her zaman doğru olamayacağını gösteren bir örnek bulunur. (Önermeyi çürüten örnek, bozulabilecek bir yemin olarak düşünülebilir.) Bir önermeyi çürüten örneğin özel bir adı vardır: **aksine örnek**.

Örnek 9.1 İlk olarak aşağıdaki sanının doğru olup olmadığını belirleyecek süreci inceleyelim.

Sanı Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n^2 - n + 11$ tamsayısı asaldır.

Bir sanının doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken, o sanı hakkında olabildiğince çok bilgi toplamak iyi bir fikirdir. O hâlde n tamsayısının çeşitli değerlerine karşılık gelen $f(n)$ sayılarını gösteren bir tablo oluşturalım:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	23	17	13	11	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

Her durumda $f(n)$ bir asal sayı olduğu için bu sanının doğru olduğu düşüncesine kapılabilirsiniz. İspata girişmeden önce bir tane daha n deneyelim. Maalesef $f(11) = 11^2 - 11 + 11 = 11^2$ asal değildir. O hâlde sanı yanlıştır çünkü $n = 11$ aksine bir örnektir. Aksini ispat şu şekilde yapılabilir.

Aksini İspat. *"Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 - n + 11$ tamsayısı asaldır."* önermesi **yanlıştır**. Dikkat edilirse $f(11) = 121 = 11 \cdot 11$ asal değildir. Bu nedenle $n = 11$ tamsayısı, aksine bir örnektir. ■

Bir önermeyi aksine örnek ile çürütürken, verilen örnek için o önermenin neden yanlış olduğunu açıklamak gerekir. Örneğin yukarıda sadece *"$n = 11$ tamsayısı aksine bir örnektir"* yazılıp bırakılırsa ispat eksik kalır. Burada $f(11)$ değerinin asal olmadığını göstermek gerekir. Bunun için $f(11) = 11 \cdot 11$ yazmak yeterlidir.

Örnek 9.2 Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı Eğer A, B ve C üç küme ise $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$ olur.

Aksini İspat. Bu önerme yanlıştır çünkü $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ ve $C=\{2,3\}$ kümeleri aksine bir örnektir. Dikkat edileceği üzere $A-(B\cap C)=\{1,3\}$ ve $(A-B)\cap(A-C)=\emptyset$ olur. Buradan $A-(B\cap C)\neq(A-B)\cap(A-C)$ elde edilir. ■

(Bu örneğin nerden geldiğini görmek için $A-(B\cap C)$ ve $(A-B)\cap(A-C)$ kümeleri için birer Venn diyagramı çizerek, bunların farklı olduğunu görebilirsiniz. Daha sonra 1, 2 ve 3 sayılarını aksine örnek oluşturacak şekilde diyagramdaki bölgelere yerleştirebilirsiniz.)

9.2 Varlık Önermelerin Çürütülmesi

Sadece bir tane aksine örnek vererek evrensel olarak nicelenmiş bir önermeyi veya koşullu bir önermeyi çürütebileceğimizi gördük. Şimdi

$$\exists x\in S, P(x)$$

varlık önermesini çürütme problemine bakalım. Bunu ispatlamak için $P(x)$ önermesini doğrulayan bir x örneği bulunmalıdır. *Çürütmek* için ise onun olumsuzu olan $\sim(\exists x\in S, P(x)) = \forall x\in S, \sim P(x)$ önermesi ispatlanmalıdır. Olumsuzlaştırılan önerme evrensel olarak nicelenmiştir. Bu nedenle $\sim P(x)$ önermesinin *her* $x\in S$ için doğrulanması gerekir. Yani tek bir örnek vermek yeterli değildir. Bunun yerine doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi kullanılarak *"Eğer $x\in S$ ise $\sim P(x)$."* koşullu önermesi kanıtlanmalıdır. Şimdi, ispatlamak ya da çürütmek için aşağıdaki sanıyı verelim.

Örnek 9.3 Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı Bir x reel sayısı $x^4<x<x^2$ şartını sağlar.

Bu iddia ilk bakışta mantıklı gelebilir. Bu önerme eğer $x^3<x<x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısının var olduğunu iddia etseydi doğru olurdu çünkü $x=-2$ istenilen koşulu taşımaktadır. Fakat önerme $x^4<x<x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısının var olduğunu iddia etmektedir. Böyle bir x sayısını bulmak için zekice tahminler yapsak da bir sorun ortaya çıkar. Örneğin $x=\frac{1}{2}$ için $x^4<x$ olur fakat $x<x^2$ olmaz. Benzer şekilde $x=2$ için $x<x^2$ olur fakat $x^4<x$ olmaz. Buna göre $x^4<x<x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısını bulmak sorunludur. Bu nedenle verilen önermenin yanlış olduğundan şüphe etmeye başlayabiliriz.

Şimdi bu önermeyi çürütebilir miyiz bir bakalım. Aksini ispat yöntemine göre bu önermeyi *çürütmek* için onun olumsuzu *kanıtlanmalıdır*. Bu önerme sembolik olarak $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 < x < x^2$ şeklide olduğu için olumsuzu

$$\sim\left(\exists x \in \mathbb{R}, x^4 < x < x^2\right) \quad = \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sim\left(x^4 < x < x^2\right)$$

şeklindedir. Bunu sözel olarak ifade edelim:

Her x reel sayısı için $x^4 < x < x^2$ ifadesi doğru değildir.

Bunu, olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım. Kabul edelim ki $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x **var** olsun. Dikkat edilirse x pozitiftir çünkü negatif olmayan x^4 sayısından büyüktür. Eğer $x^4 < x < x^2$ eşitsizliğindeki her terim x pozitif sayısı ile bölünürse $x^3 < 1 < x$ elde edilir. Daha sonra $x^3 < 1 < x$ eşitsizliğindeki her terimden 1 çıkarılarak $x^3 - 1 < 0 < x - 1$ bulunur. Buradan

$$\begin{array}{rcccl} x^3 - 1 & < & 0 & < & x - 1 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) & < & 0 & < & (x-1) \\ x^2 + x + 1 & < & 0 & < & 1 \end{array}$$

elde edilir. (Dikkat edilirse $x - 1$ ile bölme işlemi eşitsizliğinin yönünü değiştirmez çünkü yukarıdaki ikinci satır $0 < x - 1$ yani $x - 1$ sayısının pozitif olduğunu söyler.) Burada elde edilen $x^2 + x + 1 < 0$ eşitsizliği bir çelişkidir çünkü x pozitif olduğu için $x^2 + x + 1 > 0$ olmak zorundadır.

Yukarıda yaptığımız işi şu şekilde özetleyebiliriz.

"Bir x reel sayısı $x^4 < x < x^2$ şartını sağlar." önermesi **yanlıştır** çünkü yukarıda ispatlandığı üzere bunun olumsuzu olan *"Her x reel sayısı için $x^4 < x < x^2$ ifadesi doğru değildir."* önermesi doğrudur.

Alıştırmalar üzerinde çalışırken, her sanının yanlış olmak zorunda olmadığını unutmayın. Eğer bir sanı doğru ise bunun aksini ispatlamak mümkün değildir. Böyle bir durumda sanının doğru olduğu ispatlanmalıdır. Şimdi buna dair bir örnek inceleyelim.

Örnek 9.4 Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı Her biri 1'den büyük olan, birbirlerine eşit olmayan ve $x^y = y^z$ eşitliğini sağlayan x, y, z tamsayıları vardır.

Bu sanı doğrudur. Bir varlık önermesi şeklinde verilen bu sanıyı ispatlamak için istenilen şartları taşıyan x, y, z değerlerini vermek yeterlidir. Buna göre ispat şu şekildedir.

İspat. Eğer $x = 2$, $y = 16$ ve $z = 4$ seçilirse $x^y = 2^{16} = (2^4)^4 = 16^4 = y^z$ olur. ■

9.3 Olmayana Ergi ile Çürütme

Olmayana ergi yöntemi, bir önermenin aksini ispatlarken çok kullanışlı olabilir. Bunu görmek için P önermesini çürütmek istediğimizi düşünelim. P önermesini çürütmek için $\sim P$ ispatlanmalıdır. Olmayana ergi ile $\sim P$ önermesini ispatlamak için $\sim\sim P$ doğru kabul edilip bir çelişkiye ulaşılmalıdır. Ancak $\sim\sim P = P$ olduğu için bu iş, P önermesini doğru kabul ederek bir çelişkiye ulaşmakla aynıdır. Bunu şu şekilde özetleyebiliriz.

Özet: Olmayana ergi ile P nasıl çürütülür
P doğru kabul edilir ve bir çelişkiye ulaşılır.

Bu yöntemin uygulanış biçimini göstermek için Örnek 9.3'te verilen sanıyı tekrar ele alalım. Bu sefer onu olmayana ergi ile çürütelim. Burada yapacaklarımız büyük ölçüde Örnek 9.3'in tekrarıdır. Fakat sanının olumsuzlaştırılması gerekmediği için bu yöntemi uygulamak daha kolaydır.

Örnek 9.5 Aşağıdaki sanının yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı Bir x reel sayısı $x^4 < x < x^2$ şartını sağlar.

Aksini İspat. Bu sanıyı olmayana ergi ile çürütelim. Kabul edelim ki sanı doğru olsun. O hâlde $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısı vardır. Dikkat edilirse x pozitiftir çünkü negatif olmayan x^4 sayısından büyüktür. Eğer $x^4 < x < x^2$ eşitsizliğindeki her terim x ile bölünürse $x^3 < 1 < x$ bulunur. Son eşitsizliğin her terimden 1 çıkarılarak $x^3 - 1 < 0 < x - 1$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{array}{rcccl} x^3-1 & < & 0 & < & x-1 \\ (x-1)(x^2+x+1) & < & 0 & < & (x-1) \\ x^2+x+1 & < & 0 & < & 1 \end{array}$$

elde edilir. Son satırdaki $x^2 + x + 1 < 0$ eşitsizliği bir çelişkidir çünkü x pozitiftir. O hâlde verilen sanı yanlıştır. ■

Ünite 9 Alıştırmaları

Aşağıdaki her önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. Eğer önerme doğruysa ispatlayınız, yanlış ise çürütünüz. Buradaki alıştırmalar, Ünite 1-9 arasında verilen tüm konuları kapsar.

1. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ise $|x + y| = |x| + |y|$ olur.

2. Her n doğal sayısı için $2n^2 - 4n + 31$ tamsayısı asaldır.

3. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ve $n^5 - n$ çift ise n çifttir.
4. Her n doğal sayısı için $n^2 + 17n + 17$ tamsayısı asaldır.
5. Eğer A, B, C ve D dört küme ise $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ olur.
6. Eğer A, B, C ve D dört küme ise $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ olur.
7. Eğer A, B, C üç küme ve $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olur.
8. Eğer A, B, C üç küme ise $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ olur.
9. Eğer A ve B iki küme ise $\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A - B)$ olur.
10. Eğer A ve B iki küme ve $A \cap B = \emptyset$ ise $\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A - B)$ olur.
11. Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $a + b < ab$ olur.
12. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer ab, bc ve ac çarpımlarının hepsi aynı pariteye sahip ise a, b ve c sayılarının tamamı aynı paritelidir.
13. $\mathbb{R} \subseteq X$ ve $\emptyset \in X$ olacak şekilde bir X kümesi vardır.
14. Eğer A ve B iki küme ise $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$ olur.
15. Her tek tamsayı üç tane tek tamsayının toplamıdır.
16. Eğer A ve B sonlu kümeler ise $|A \cup B| = |A| + |B|$ olur.
17. Her A ve B kümesi için eğer $A - B = \emptyset$ ise $B = \emptyset$ olur.
18. Eğer $a, b, c \in \mathbb{N}$ ise $a - b$, $a + c$ ve $b - c$ sayılarından en az biri çifttir.
19. Eğer $r, s \in \mathbb{Q}$ ve $r < s$ ise $r < u < s$ olacak şekilde bir u irrasyonel sayısı vardır.
20. $1000 = p - q$ olacak şekilde p ve q asal sayıları vardır.
21. $97 = p - q$ olacak şekilde p ve q asal sayıları vardır.
22. Eğer p ile q iki asal sayı ve $p < q$ ise $2p + q^2$ tektir.
23. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x^3 < y^3$ ise $x < y$ olur.
24. Her x reel sayısı için $2^x \geq x + 1$ olur.
25. Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için eğer $a \mid bc$ ise $a \mid b$ veya $a \mid c$ olur.
26. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $A = B - C$ ise $B = A \cup C$ olur.
27. $2^x = x^2$ denkleminin üç tane reel sayı çözümü vardır.
28. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = b$ olur.
29. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $|x + y| = |x - y|$ ise $y = 0$ olur.
30. $42a + 7b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.
31. 1 dışındaki hiçbir sayı, Pascal üçgeninde dört defadan fazla bulunmaz.
32. Eğer $n, k \in \mathbb{N}$ ve $\binom{n}{k}$ asal ise $k = 1$ veya $k = n - 1$ olur.
33. Derecesi 1'den büyük veya eşit olan bir $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ polinomunun katsayılarının tamamı doğal sayı olsun. Bu durumda $f(n)$ asal olmayacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.
34. Eğer $X \subseteq A \cup B$ ise $X \subseteq A$ veya $X \subseteq B$ olur.
35. Ünite 5'in 25. alıştırmasında, eğer $2^n - 1$ asal ise n tamsayısının asal olduğunu ispatlamanız istenmiştir. Bunun karşıtı doğru mudur?

ÜNİTE 10

Matematiksel Tümevarım

Bu ünitede, **matematiksel tümevarım** (ya da kısaca **tümevarım**) adı verilen çok kuvvetli bir ispat yöntemini inceleyeceğiz. Bu yöntemi açıklamak için öncelikle tümevarımla ispatlanan önerme çeşitlerine bakalım. Aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım.

Sanı İlk n tane tek doğal sayının toplamı n^2 olur.

Bu sanıda verilen ifade aşağıdaki tabloda görselleştirilmiştir. Tablonun her satırı n doğal sayısı ile başlar. Bunu, ilk n tane tek doğal sayının toplamı takip eder. Her satır n^2 ile biter.

n	İlk n tane tek doğal sayının toplamı	n^2
1	$1 =$	1
2	$1+3=$	4
3	$1+3+5=$	9
4	$1+3+5+7=$	16
5	$1+3+5+7+9=$	25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)=$	n^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tablonun ilk beş satırına dikkatlice bakılırsa bu satırlardaki ilk n tek doğal sayının toplamının gerçekten de n^2 olduğu görülebilir. Üstelik bu satırlar, n−yinci sıradaki tek doğal sayının (her bir toplamdaki son sayı) $2n-1$ olduğunu işaret eder. (Örneğin $n=2$ ise ikinci sıradaki tek doğal sayı $2\cdot 2-1=3$ ve $n=3$ ise üçüncü sıradaki tek doğal sayı $2\cdot 3-1=5$ vb. olur.)

Bu tablo şu soruyu akla getirir: $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$ toplamı her zaman n^2 midir? Bir başka deyişle verilen sanı doğru mudur?

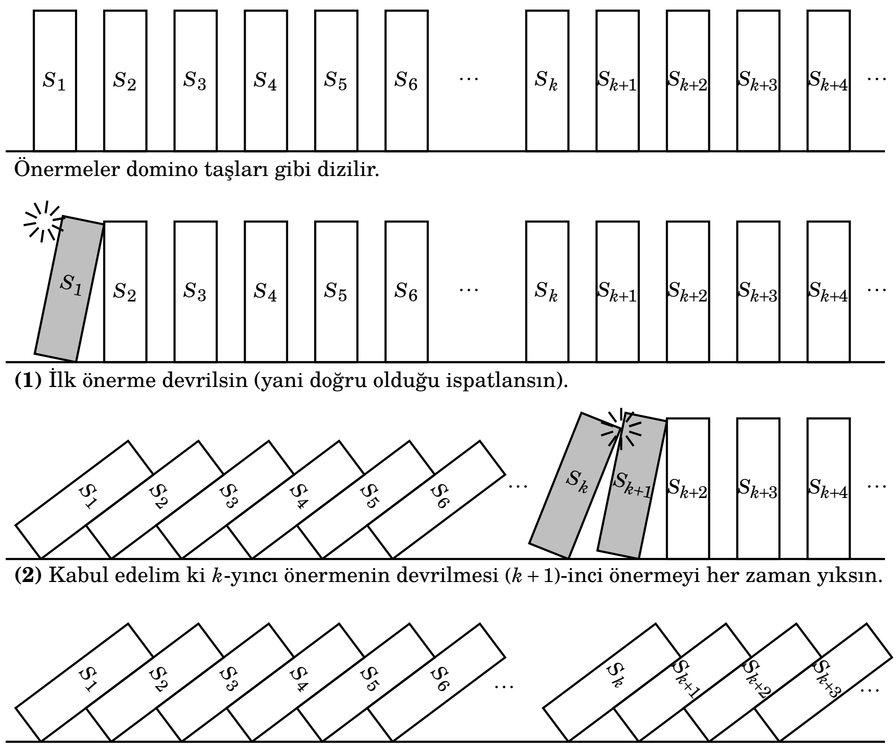
Şimdi bu soruya farklı bir açıdan bakalım. Her n doğal sayısına (yani tablonun her satırına) karşılık olarak S_n önermesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$
\begin{aligned}
&S_1 : 1 = 1^2\\
&S_2 : 1+3 = 2^2\\
&S_3 : 1+3+5 = 3^2\\
&\vdots\\
&S_n : 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Buna göre soru şudur: Bu önermelerin hepsi doğru mudur?

Matematiksel tümevarım; $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ önermelerinden oluşan sonsuz bir listedeki tüm önermeleri ispatlamak için kullanılır. Oldukça basit olan bu yöntemi görsel olarak ifade etmek için önermeleri sıraya dizilmiş domino taşları olarak hayal edelim. Şimdi, S_1 önermesi ispatlansın. Bunu, S_1 domino taşınının devrilmesi ile sembolize edelim. Ayrıca herhangi bir S_k önermesinin doğru olmasının (devrilmesinin) S_{k+1} önermesinin doğru olmasını (devrilmesini) gerektireceği de ispatlansın. Buna göre S_1 devrilip S_2'yi; S_2 devrilip S_3'ü; S_3 devrilip S_4'ü yıkar. Süreç bu şekilde devam eder. Kaçınılmaz olarak tüm önermeler devrilir (yani doğru oldukları ispatlanır).

Matematiksel Tümevarımın Arkasındaki Fikir



Önermeler domino taşları gibi dizilir.

(1) İlk önerme devrilsin (yani doğru olduğu ispatlansın).

(2) Kabul edelim ki k-yıncı önermenin devrilmesi $(k+1)$-inci önermeyi her zaman yıksın.

Bu durumda bütün taşlar devrilmek zorundadır (yani bütün önemeler ispatlanmış olur).

10.1 Tümevarım ile İspat

Domino taşlarından hareketle *matematiksel tümevarım ile ispat* adında yeni bir ispat yöntemi verebiliriz.

Özet: Tümevarım ile İspat Yöntemi

Önerme $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ önermelerinin hepsi doğrudur.

İspat. (Tümevarım).
(1) İlk önce S_1 önermesinin doğru olduğu ispatlanır.
(2) Her $k \geq 1$ için $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi ispatlanır.
Matematiksel tümevarım yöntemine göre her S_n önermesi doğrudur. ■

Buradaki ilk adım, **başlangıç adımı** olarak adlandırılır. Genellikle S_1 çok basittir ve onu ispatlamak oldukça kolaydır. İkinci adıma **tümevarım adımı** denir. Tümevarım adımındaki $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi çoğu zaman doğrudan ispat ile kanıtlanır. Bunun için S_k önermesi doğru kabul edilir ve S_{k+1} önermesinin doğru olması gerektiği gösterilir. Burada, S_k önermesinin doğru olduğu varsayımına **tümevarım hipotezi** denir.

Şimdi bu yöntemi, yukarıda verilen ve ilk n tane tek doğal sayının toplamının n^2 olduğunu iddia eden sanıya uygulayalım. Amacımız, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n : 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ ile verilen önermenin doğru olduğunu göstermektir. Başlamadan önce, S_n önermesinde n yerine k yazalım. Buna göre S_k önermesi, $S_k : 1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ şeklindedir. Ayrıca, n yerine $k+1$ yazılırsa $S_{k+1} : 1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ elde edilir.

Önerme Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ olur.

İspat. Matematiksel tümevarım yöntemini kullanalım.

1. Bu önerme, $n = 1$ için $1^2 = 1$ hâlini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.
2. Şimdi, her $k \geq 1$ için $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ yani $1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ ise $1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu doğrudan ispatlayalım. Kabul edelim ki $1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ olsun.

$$\begin{aligned}
1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2(k+1)-1) &= \\
1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= \\
\big(1+3+5+7+\cdots+(2k-1)\big)+(2(k+1)-1) &= \\
k^2 \;+(2(k+1)-1) &= k^2+2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

O hâlde $1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ olur. Yani $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ doğrudur. Tümevarım yöntemine göre $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. ■

Tümevarım ispatlarındaki ilk önerme genellikle 1 doğal sayısı ile indislenir Ancak bu her zaman böyle olmak zorunda değildir. Probleme bağlı olarak, ilk önerme S_0 ya da S_m olabilir. Burada m herhangi bir tamsayıdır. Bir sonraki örnek $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ önermelerini içerir. İspat için verilen ana çerçeve burda da geçerlidir ama başlangıç adımında S_1 yerine S_0 ispatlanır.

Önerme Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise $5 \mid (n^5 - n)$ olur.

İspat. Bunu matematiksel tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. Negatif olmayan ilk tamsayı 0 olduğu için başlangıç adımı $n = 0$ için ispatlanmalıdır.

1. Bu önerme, $n = 0$ için $5 \mid (0^5 - 0)$ yani $5 \mid 0$ hâlini alır ki bu açıkça doğrudur.

2. Şimdi $k \geq 0$ olsun. Eğer $5 \mid (k^5 - k)$ ise $5 \mid \big((k+1)^5 - (k+1)\big)$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $5 \mid (k^5 - k)$ olsun. Buna göre $k^5 - k = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 \\
&= (k^5 - k) + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5a + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5(a + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)
\end{aligned}$$

   olduğu görülebilir. O hâlde $(k+1)^5 - (k+1)$ ifadesi 5'in bir katıdır. Böylece $5 \mid \big((k+1)^5 - (k+1)\big)$. Sonuç olarak $5 \mid (k^5 - k)$ ise $5 \mid \big((k+1)^5 - (k+1)\big)$ olur.

Tümevarım yöntemine göre, negatif olmayan her $n \in \mathbb{Z}$ için $5 \mid (n^5 - n)$ olur. ■

Tümevarım yöntemi $\forall n \in \mathbb{N}, S_n$ formundaki önermeleri ispatlamak için kullanılır. Ana hatları yukarıda çizilen bu yöntem $\forall n \in \mathbb{Z}, S_n$ formundaki önermelerde *çalışmaz* (buradaki n sayısı $\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{Z}$ kümesindedir). Bunun sebebi şudur: $\forall n \in \mathbb{Z}, S_n$ önermesi tümevarımla ispatlanırken, S_1 önermesi ile $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesinin doğru oldukları gösterilir. Buradan sadece, her $n \geq 1$ için S_n önermesinin doğru olduğu sonucu çıkar. Fakat $S_0, S_{-1}, S_{-2}, \ldots$ önermelerinin doğru olduklarına dair birşey söylenemez. Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}, S_n$ önermesi tümevarım ile ispatlanmak istenirse bir S_a önermesinin yanı sıra $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ **ve** $S_k \Rightarrow S_{k-1}$ önermelerinin de ispatlanması gerekir.

Ne yazık ki *matematiksel tümevarım* ismi, benzer koşullar altında yapılan önceki gözlemlere dayanarak bir şeyin doğru olabileceği sonucuna varma süreci anlamına gelen *tümevarımsal akıl yürütme* ile karıştırılabilir. Burada belirtildiği gibi matematiksel tümevarımın, önermeleri mutlak bir kesinlikle ispatlayan, ciddi bir ispat yöntemi olduğunu unutmayınız.

Bu bölümü toparlamak için tümevarım ile dört tane daha ispat yapalım.

Önerme Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 0$ ise $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ olur.

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

1. Bu önerme $n = 0$ için $\sum_{i=0}^{0} i \cdot i! = (0+1)! - 1$ şeklindedir. Bu eşitliğin sol tarafı $0 \cdot 0! = 0$, sağ tarafı $1! - 1 = 0$ olur. Her iki taraf da 0 olup eşitlik sağlanır.

2. Şimdi herhangi bir $k \geq 0$ sayısını ele alalım. Buna göre S_k önermesinin S_{k+1} önermesini gerektirdiğini göstermeliyiz. Bir başka ifadeyle

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1 \qquad \text{ise} \qquad \sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapabiliriz. Kabul edelim ki $\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! &= \left(\sum_{i=0}^{k} i \cdot i!\right) + (k+1)(k+1)! \\
&= \big((k+1)! - 1\big) + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 \\
&= \big(1 + (k+1)\big)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1 \\
&= ((k+1)+1)! - 1
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Böylece $\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1$ elde edilir.

Tümevarım yöntemine göre her $n \geq 0$ için $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ olur. ■

Tümevarım yöntemiyle ispat yaparken, tümevarım adımında $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ ispatlanmalıdır. Bunun yerine $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ de ispatlanabilir. Yani önermenin n için doğru olduğu kabul edilip $n+1$ için de doğru olduğu gösterilebilir. Bazen de, yine geçerli olan, $S_{n-1} \Rightarrow S_n$ önermesini ispatlamak daha kolaydır. Biz, aşağıdaki örneklerde $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesini kullanacağız. Fakat tek numaralı alıştırmalardan bazılarında $S_n \Rightarrow S_{n+1}$ veya $S_{n-1} \Rightarrow S_n$ önermeleri kullanılır. Deneyim, okuyarak ve pratik yaparak kazanılır.

Şimdi çözeceğimiz örnek, bazı durumlarda faydalı olabilecek bir püf noktasını gösterir. Bir eşitliğin her iki tarafına aynı miktarda ekleme yapmak o eşitliği bozmaz. Bir *eşitsizliğin* her iki tarafına *farklı* miktarlarda ekleme yapıldığında, büyük olan tarafa eklenen miktar küçük olan tarafa eklenenden daha fazla olduğu sürece eşitsizlik bozulmaz. Örneğin, $x \le y$ ve $a \le b$ ise $x + a \le y + b$ olur. Benzer şekilde $x \le y$ ve b pozitif ise $x \le y + b$ olur. Sıklıkla göz ardı edilen bu gözlem aşağıda kullanılacaktır.

Önerme Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \le 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$ olur.

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

1. Eğer $n = 1$ ise bu önerme $2^1 \le 2^{1+1} - 2^{1-1} - 1$ yani $2 \le 4 - 1 - 1$ hâlini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

2. Şimdi $k \ge 1$ olsun. Burada, $2^k \le 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1$ ise $2^{k+1} \le 2^{(k+1)+1} - 2^{(k+1)-1} - 1$ olacağını doğrudan ispatlayalım. Kabul edelim ki $2^k \le 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1$ olsun.

$$\begin{array}{rcll}
2^k & \le & 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1 & \\
2\left(2^k\right) & \le & 2\left(2^{k+1} - 2^{k-1} - 1\right) & \text{(her iki taraf 2 ile çarpılmıştır)} \\
2^{k+1} & \le & 2^{k+2} - 2^k - 2 & \\
2^{k+1} & \le & 2^{k+2} - 2^k - 2 + 1 & \text{(büyük tarafa 1 eklenmiştir)} \\
2^{k+1} & \le & 2^{k+2} - 2^k - 1 & \\
2^{k+1} & \le & 2^{(k+1)+1} - 2^{(k+1)-1} - 1 &
\end{array}$$

Tümevarım yöntemine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \le 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$ elde edilir. ■

Bundan sonraki örnekte eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $(1+x)^n \ge 1 + nx$ eşitsizliğinin, $x > -1$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için doğru olduğunu göstereceğiz. Yani

$$S_n : \text{Her } x > -1 \text{ reel sayısı için } (1+x)^n \ge 1 + nx$$

önermesini her $n \in \mathbb{N}$ için doğrulayacağız. Bu örnek, daha önce ispatladığımız $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ formundaki örneklerden biraz farklıdır. (Buradaki $P(n)$ ifadesi n hakkındaki bir önermedir.) Bu sefer ispatlayacağımız önerme

$$\forall x \in \mathbb{N}, \Big(\forall x \in (-1, \infty), P(n, x)\Big)$$

formundadır. Böylelikle $P(n,x) : (1+x)^n \ge 1 + nx$ açık önermesi sadece n doğal sayısını değil, aynı zamanda x değişkenini de içerir. (Kayıtlara geçmesi açısından $(1+x)^n \ge 1 + nx$ eşitsizliği *Bernoulli eşitsizliği* olarak bilinir.)

Önerme Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise her $x > -1$ reel sayısı için $(1+x)^n \geq 1+nx$ olur.

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

1. Başlangıç adımı olarak $n = 1$ için bu önerme $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ ile verilir. Her iki tarafı da $1+x$ olduğu için bu eşitsizlik doğrudur.
2. Şimdi $k \geq 1$ olsun. Kabul edelim ki $(1+x)^k \geq 1+kx$ önermesi her $x > -1$ reel sayısı için doğru olsun. Buna göre $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ olduğu gösterilmelidir. Dikkat edilirse $x > -1$ olduğu için $1+x$ pozitiftir. O hâlde $(1+x)^k \geq 1+kx$ ifadesini $1+x$ ile çarpmak eşitsizliğin yönünü değiştirmez.

$$\begin{aligned}(1+x)^k(1+x) &\geq (1+kx)(1+x)\\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+x+kx+kx^2\\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+(1+k)x+kx^2\end{aligned}$$

Son satırdaki kx^2 terimi pozitiftir. Bu terimi, eşitsizliğin sağ tarafından çıkarmak o tarafı küçültür. Böylelikle $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ olur. ■

Sıradaki örneğin başlangıç adımı, rutin bir kontrolden fazlasını içerir. (Daha sonra kullanacağımız için bu örneğe bir numara verelim.)

Önerme 10.1 Kabul edelim ki $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ile n birer tamsayı ve $n \geq 2$ olsun. Eğer p asal ve $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)$ ise en az bir a_i için $p \mid a_i$ olmalıdır.

İspat. Bu önermeyi n üzerine tümevarım uygulayarak ispatlayalım.

1. Başlangıç adımı $n = 2$ için ispatlanmalıdır. Kabul edelim ki p asal ve $p \mid (a_1a_2)$ olsun. O hâlde $p \mid a_1$ veya $p \mid a_2$ olduğu gösterilmeilir. Buna denk olarak eğer $p \nmid a_1$ ise $p \mid a_2$ olduğu da gösterilebilir. Şimdi $p \nmid a_1$ olsun. Dikkat edilirse p asal olduğu için $\text{ebob}(p, a_1) = 1$ olur. Önerme 7.1'den (s. 152) $1 = pk + a_1 l$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitliğin iki yanı a_2 ile çarpılıp

$$a_2 = pka_2 + a_1a_2l$$

yazılabilir. Kabul ettiğimiz üzere p asalı a_1a_2 sayısını böler. Buna göre p asalının, eşitliğin sağ tarafındaki $pka_2 + a_1a_2l$ ifadesini böleceği açıktır. Buradan $p \mid a_2$ bulunur. Böylece eğer $p \mid (a_1a_2)$ ise $p \mid a_1$ veya $p \mid a_2$ olduğunu ispatlamış olduk. Bu, başlangıç adımını tamamlar.
2. Şimdi $k \geq 2$ olsun. Kabul edelim ki $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k)$ iken $p \mid a_i$ olacak şekilde en az bir a_i var olsun. Buradan $p \mid \big((a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k) \cdot a_{k+1}\big)$ yazılabilir. Başlangıç adımında ispatlanan sonuca göre $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k)$ veya $p \mid a_{k+1}$ olmalıdır. Tümevarım hipoteziyle birlikte bu gözlem, p asalının a_i tamsayılarından birini bölmesi gerektiğini söyler. ■

Birkaç alıştırma üzerinde çalışarak, anladıklarınızı test edebilirsiniz.

10.2 Güçlü Tümevarım ile İspat

Bazı tümevarım ispatlarında, S_k doğruyken S_{k+1} önermesinin de doğru olduğunu göstermek zordur. S_{k+1} önermesini doğrulamak için daha "önceki" bir S_m $(m < k)$ önermesini kullanmak daha kolay olabilir. Böyle durumlar için güçlü tümevarım adı verilen biraz daha değişik bir tümevarım yöntemi vardır. Güçlü tümevarım, bildiğimiz tümevarım yöntemine benzer çalışır. Aradaki tek fark, ikinci adımda S_k önermesini doğru kabul edip S_{k+1} önermesini ispatlamak yerine $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ önermelerinin *hepsini* doğru kabul edip S_{k+1} önermesini ispatlamaktır. Buradaki ana fikir şudur: İlk k taşın devrilmesi $(k+1)$–inci taşı yıkıyorsa bütün domino taşları yıkılmalıdır.

Özet: Güçlü Tümevarım ile İspat Yöntemi

Önerme $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ önermelerinin hepsi doğrudur.

İspat. (Güçlü tümevarım).
(1) S_1 önermesi ispatlanır. (Ya da ilk birkaç S_n ispatlanır.)
(2) Verilen her $k \geq 1$ için $(S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_k) \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi ispatlanır. ■

Bu yöntem, S_k kullanılarak S_{k+1} önermesinin kolaylıkla gösterilemediği durumlarda işe yarar. S_{k+1} önermesini ispatlamak için başka bir önerme (örneğin S_{k-1} veya S_{k-2}) daha çok işe yarayabilir. Güçlü tümevarımda $S_1, S_2, \ldots, S_k$ önermelerinden biri (veya hepsi) kullanılarak S_{k+1} ispatlanır.

İşte güçlü tümevarımın klasik bir örneği: 8 kuruş veya daha fazla olan posta ücreti, sadece 3 ve 5 kuruşluk pullarla ödenebilir mi? Örneğin, 47 kuruşluk posta ücreti için dokuz tane 3 kuruşluk ve dört tane 5 kuruşluk pul kullanılabilir. Şimdi *"S_n : n kuruşluk posta ücreti sadece* 3 *ve* 5 *kuruşluk pullarla ödenebilir."* önermesini ele alalım. Buna göre S_8, S_9, S_{10}, S_{11} … ispatlanmalıdır. S_{k+1} önermesini ispatlamak için kendisinden üç adım "geri" gitmek gerekir. O hâlde başlangıç adımında S_8, S_9 ve S_{10} ispatlanmalıdır.

Önerme 8 kr. ve fazlası posta ücretleri 3 ve 5 kuruşluk pullarla ödenebilir.

İspat. Güçlü tümevarım yöntemi kullanalım.

1. Bu önerme 8,9 ve 10 kr. olan posta ücretleri için doğrudur. Bunlar sırası ile bir tane 3, bir tane 5; üç tane 3 ve iki tane 5 kuruşluk pul ile ödenebilir.
2. Şimdi, $k \geq 10$ olsun. Her $8 \leq m \leq k$ için m kuruşluk posta ücreti 3 ve 5 kuruşluk pullarla ödenebilsin. (Yani $S_8, S_9, \ldots, S_k$ doğru olsun.) Buna göre S_{k+1} önermesinin doğru olduğu yani $k+1$ kuruşluk posta ücretinin 3 ve 5 kuruşluk pullarla ödenebileceği gösterilmelidir. Kabulümüz gereği S_{k-2} doğrudur. Yani $k-2$ kuruşluk posta ücreti 3 ve 5 kuruşluk pullarla ödenebilir. Buna 3 kuruşluk bir pul eklenirse $(k-2)+3 = k+1$ olur. ■

Sıradaki örnekte, her $n \in \mathbb{N}$ için $12 \mid (n^4 - n^2)$ olduğunu ispatlayalım. Fakat öncesinde, sıradan tümevarımda ortaya çıkacak sorunu görelim. Sıradan tümevarıma, $n = 1$ için $12 \mid (n^4 - n^2)$ olduğu göstererek başlarız. Eğer $n = 1$ ise $12 \mid 0$ olur ki bu doğrudur. Bundan sonra, $12 \mid (k^4 - k^2)$ olduğu kabul edilip $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $12 \mid (k^4 - k^2)$ ise $k^4 - k^2 = 12a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $(k+1)^4 - (k+1)^2 = 12b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ bulmamız gerekir. Son eşitliğin sol tarafını açalım:

$$
\begin{aligned}
(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + 2k + 1) \\
&= (k^4 - k^2) + 4k^3 + 6k^2 + 6k \\
&= 12a + 4k^3 + 6k^2 + 6k\,.
\end{aligned}
$$

Bu noktada tıkanıp kalırız çünkü bu ifade 12 parantezine alınamaz.

Şimdi güçlü tümevarım kullanalım. $S_n : 12 \mid (n^4 - n^2)$ verilsin. Buna göre $S_1, S_2, \ldots, S_k$ doğru kabul edilip S_{k+1} ispatlanmalıdır. S_1'den S_k'ya tüm önermeler doğru ise $k - 5 \geq 1$ için S_{k-5} doğrudur. $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ yerine $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ ifadesini gösterelim. Eğer $k - 5 \geq 1$ ise $k \geq 6$ olur. O hâlde $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ önermelerinin hepsi başlangıç adımında doğrulanmalıdır. Bu noktadan sonra, $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi diğer tüm önermelerin doğru olduğunu söyler. Örneğin $k = 6$ için $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ önermesinden $S_1 \Rightarrow S_7$ yazılabilir. Yani S_7 doğrudur. Benzer şekilde $k = 7$ için $S_2 \Rightarrow S_8$ olur. Yani S_8 doğrudur.

Önerme 10.2 Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $12 \mid (n^4 - n^2)$.

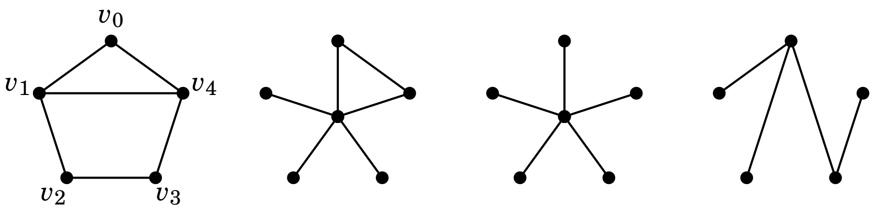
İspat. Bu ispatı güçlü tümevarım yöntemiyle yapalım.

1. Dikkat edileceği üzere bu önerme, ilk altı pozitif tamsayı için doğrudur:
   - $n = 1$ için 12 böler $1^4 - 1^2 = 0$.
   - $n = 2$ için 12 böler $2^4 - 2^2 = 12$.
   - $n = 3$ için 12 böler $3^4 - 3^2 = 72$.
   - $n = 4$ için 12 böler $4^4 - 4^2 = 240$.
   - $n = 5$ için 12 böler $5^4 - 5^2 = 600$.
   - $n = 6$ için 12 böler $6^4 - 6^2 = 1260$.
2. Şimdi $k \geq 6$, $1 \leq m \leq k$ ve $12 \mid (m^4 - m^2)$ olsun. (Yani $S_1, \ldots, S_k$ doğru olsun.) Buna göre S_{k+1} yani $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$ olduğu ispatlanmalıdır. S_{k-5} doğru ise $12 \mid \big((k-5)^4 - (k-5)^2\big)$. Buna göre $k - 5 = \ell$ seçilerek $12 \mid (\ell^4 - \ell^2)$ yazılabilir. O hâlde $\ell^4 - \ell^2 = 12a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylelikle,

$$
\begin{aligned}
(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (\ell + 6)^4 - (\ell + 6)^2 \\
&= \ell^4 + 24\ell^3 + 216\ell^2 + 864\ell + 1296 - (\ell^2 + 12\ell + 36) \\
&= (\ell^4 - \ell^2) + 24\ell^3 + 216\ell^2 + 852\ell + 1260 \\
&= 12a + 24\ell^3 + 216\ell^2 + 852\ell + 1260 \\
&= 12(a + 2\ell^3 + 18\ell^2 + 71\ell + 105).
\end{aligned}
$$

Burada $(a + 2\ell^3 + 18\ell^2 + 71\ell + 105) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$. ■

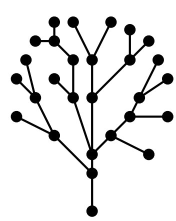
Bir sonraki örneğimiz, *çizgeler* adındaki matematiksel nesneler hakkındadır. **Köşeler** adı verilen noktalar ile bu noktaları birleştiren (ve **kenarlar** adı verilen) doğrulardan oluşan bir yapıya **çizge** denir. Aşağıda dört tane çizge örneği verilmiştir. Burada kullanacağımız çizgeler "tek parçadan" oluşur. Bir başka deyişle, çizgenin herhangi bir köşesinden başka bir köşesine, kenarlar üzerinden geçen bir yolu kullanarak yürüyüş yapılabilir.



Şekil 10.1: Çizge örnekleri

Başladığı yerde biten ve birbirinden farklı kenarlar dizisinden oluşan bir güzergâha **döngü** denir. Örneğin Şekil 10.1'de verilen en soldaki çizgede; v_1 köşesinde başlayıp ilk önce v_2, sonra v_3 ve oradan da v_4 köşesine gidip tekrar başlangıç noktası olan v_1 köşesine dönen bir döngü vardır. Sol taraftaki iki çizgeye ait döngüler bulabilirsiniz. Ancak sağ taraftaki iki çizge döngü içermez. Döngü içermeyen bir çizgeye **ağaç** denir. Buna göre Şekil 10.1'in sağ tarafında verilen iki çizge birer ağaçtır. Ancak sol tarafındaki iki çizge birer ağaç değildir. Dikkat edilirse tek bir köşeden oluşan • çizgesine ait bir döngü yoktur. Bu nedenle bu çizge (tek köşeli ve sıfır kenarlı) bir ağaçtır.

Şekil 10.1'deki her iki ağacın da kenar sayısı köşe sayısından azdır. En sağdaki ağacın 5 köşesi ve 4 kenarı vardır. Yanındakinin ise 6 köşesi ve 5 kenarı vardır. Şekil 10.2'deki gibi herhangi bir ağaç çizildiğinde, eğer o ağacın n köşesi var ise $n-1$ de kenarı vardır. Şimdi bunu ispatlayalım.



Şekil 10.2: Bir ağaç

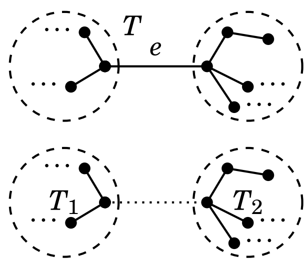
İspat için şu gözlemi kullanabiliriz: Bir ağacın, (uç noktaları hariç) herhangi bir kenarı silinirse o ağaç kendisinden küçük olan iki ağaca ayrılır.

Önerme 10.3 Eğer bir ağacın n köşesi var ise o ağacın $n-1$ kenarı vardır.

İspat. Bu teorem, her $n \in \mathbb{N}$ için *"S_n : n tane köşesi olan bir ağacın $n-1$ tane kenarı vardır."* önermesinin doğru olduğunu iddia eder. Bunu güçlü tümevarım ile ispatlayalım.

1. Bir ağacın $n = 1$ köşesi varsa hiç kenarı yoktur. O hâlde bu ağacın $n-1 = 0$ kenarı vardır. Böylece teorem $n = 1$ için doğrudur. (Yani S_1 doğrudur.)
2. Şimdi, $k \geq 1$ olsun. Buna göre $(S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_k) \Rightarrow S_{k+1}$ olduğu gösterilmelidir. Bir başka ifadeyle, $1 \leq m \leq k$ olmak üzere m köşesi olan herhangi bir ağacın $m-1$ kenarı var ise $k+1$ köşesi olan her ağacın $(k+1)-1 = k$ tane kenarının olduğu gösterilmelidir. Bunu doğrudan ispat ile yapalım.

   Kabul edelim ki $1 \leq m \leq k$ koşulunu sağlayan her m tamsayısı için m köşeli bir ağacın $m-1$ kenarı olsun. Şimdi, $k+1$ köşesi olan bir T ağacını ele alalım. Bu ağacının bir kenarını seçelim ve o kenarı e ile gösterelim.

   Köşeleri kalmak kaydıyla e kenarını silelim. Bu şekilde T_1 ve T_2 olarak adlandırabileceğimiz iki tane küçük ağaç elde ederiz. T_1 ağacının köşe sayısına x ve T_2 ağacının köşe sayısına y diyelim. Küçük ağaçların köşe sayıları $(k+1)$'den daha az olduğu için tümevarım hipotezi, T_1 ağacının $x-1$ tane, T_2 ağacının da $y-1$ tane kenarı olduğunu garanti eder. Şimdi, T ağacının $x+y$ tane köşesi vardır. Ayrıca T_1'e ait olan $x-1$ tane kenarı, T_2'ye ait olan $y-1$ tane kenarı ve bunların hiçbirine ait olmayan bir e kenarı vardır. Buna göre T ağacının toplam olarak $(x-1)+(y-1)+1 = (x+y)-1$ tane kenarı vardır. Bir başka deyişle, T ağacının kenar sayısı köşe sayısından bir azdır. O hâlde T'nin $(k+1)-1 = k$ tane kenarı vardır.

Güçlü tümevarım ilkesine göre, n köşeli bir ağacın $n-1$ kenarı vardır. ■

Yukarıdaki ispatta güçlü tümevarım yöntemini kullanmak kesinlikle gereklidir çünkü T_1 ve T_2 ağaçlarının köşe sayıları aynı anda k olamaz. En az birinin köşe sayısı k'dan azdır. Bu nedenle, S_{k+1} önermesini ispatlamak için S_k tek başına yetmez. Burada $m \leq k$ olduğunda S_m önermesinin doğru olduğu varsayımına ihtiyaç duyulur ve güçlü tümevarım buna olanak sağlar.

10.3 En Küçük Aksine Örnekle İspat

Bu bölümde **en küçük aksine örnekle ispat** adı verilen başka bir ispat yöntemini inceleyeceğiz. Tümevarım ve olmayana ergi yöntemlerinin karışımdan oluşan bu metodun bizi doğruca çelişkiye götürmek gibi güzel bir özelliği vardır. Bu nedenle, Ünite 6'da verilen olmayana ergi yönteminden daha "otomatiktir." Bu yöntemin ana hatları şu şekildedir.

Özet: En Küçük Aksine Örnekle İspat

Önerme $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ önermelerinin hepsi doğrudur.

İspat. (En küçük aksine örnek).
(1) İlk önce S_1 önermesi doğrulanır.
(2) Olmayana ergi için S_n önermelerinden bazıları yanlış kabul edilir.
(3) **Yanlış** olan en küçük indisli önerme S_k olsun ($k > 1$).
(4) O hâlde S_{k-1} doğrudur, S_k yanlıştır. Buradan bir çelişki elde edilir. ■

Bu kurgu, bizi S_{k-1} önermesinin doğru fakat S_k önermesinin yanlış olduğu bir noktaya götürür. Doğru ile yanlışın kesiştiği bu noktada bir çelişki vardır. Şimdi buna bir örnek verelim.

Önerme Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $4 \mid (5^n - 1)$.

İspat. En küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanalım. (Pratikte yapılmasa da yukarıdaki özetle örtüşmesi için adımlarımıza numara verelim.)

1. Bu önerme, $n = 1$ için $4 \mid (5^1 - 1)$ yani $4 \mid 4$ hâlini alır. Bu ise doğrudur.
2. Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $4 \mid (5^n - 1)$ önermesi doğru olmayacak şekilde n doğal sayıları var olsun.
3. Şimdi, $4 \nmid (5^k - 1)$ şartını sağlayan en küçük tamsayı k olsun.
4. Buna göre $4 \mid (5^{k-1} - 1)$ olur. O hâlde $5^{k-1} - 1 = 4a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan
$$\begin{aligned} 5^{k-1} - 1 &= 4a \\ 5(5^{k-1} - 1) &= 5 \cdot 4a \\ 5^k - 5 &= 20a \\ 5^k - 1 &= 20a + 4 \\ 5^k - 1 &= 4(5a + 1) \end{aligned}$$
yazılabilir. Son satır $4 \mid (5^k - 1)$ anlamına gelir. Bu bir çelişkidir çünkü 3. adım $4 \nmid (5^k - 1)$ olduğunu söyler. Bu nedenle, 2. adımda yapılan varsayım yanlıştır. Sonuç olarak $4 \mid (5^n - 1)$ önermesi her n için doğrudur. ■

10.4 Aritmetiğin Temel Teoremi

Aritmetiğin temel teoremi, 1'den büyük olan her tamsayının bir tek asal ayrışımı olduğunu ifade eder. Örneğin 12 tamsayısı $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır ve üstelik 12'nin *her* asal ayrışımı sadece 2, 2 ve 3 sayılarından oluşur. Burada yapacağımız ispat; tümevarım, durum incelemesi ve en küçük aksine örnek yöntemi ile Bölüm 7.3'ün sonunda verilen varlık ve teklik fikirlerini birleştirecektir.

Teorem 10.1 (Aritmetiğin Temel Teoremi) Birden büyük her n tamsayısı tek bir şekilde asal çarpanlarına ayrılır. Buradaki "teklikten" kasıt şudur: Eğer $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ aynı sayının asal ayrışımları ise $k = l$ olur. Ayrıca a_i ile p_i asalları aynıdır fakat bunlar farklı sırada olabilir.

İspat. Kabul edelim ki $n > 1$ olsun. İlk önce, güçlü tümevarım ile n tamsayısının bir asal ayrışımının olduğunu gösterelim. Başlangıç adımı olarak, eğer $n = 2$ ise n bir asal sayıdır ve bu kendi başına bir asal ayrışımdır. Şimdi $n \geq 2$ olmak üzere 2 ile n (dahil) arasındaki her sayının bir asal ayrışımının var olduğunu kabul edelim. Buna göre $n+1$ tamsayısını ele alalım. Bu sayı asal ise kendi başına bir asal ayrışımdır. Asal değilse $a, b > 1$ olmak üzere $n+1 = ab$ yazılabilir. Ancak a ve b tamsayıları $(n+1)$'den küçük olduğu için $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $b = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_l$ asal ayrışımları vardır. Buna göre

$$n+1 = ab = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k)(q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_l)$$

çarpımı $n+1$ tamsayısının bir asal ayrışımıdır. Böylelikle, güçlü tümevarım yöntemine göre 1'den büyük her tamsayının bir asal ayrışımı vardır.

Şimdi en küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanarak her $n > 2$ tamsayısının asal ayrışımının bir tek olduğunu gösterelim. Eğer $n = 2$ ise n'nin asal ayrışımının tek olduğu açıktır ve bu da kendisidir. Şimdi, olmayana ergi yöntemini kullanarak, bir $n > 2$ tamsayısının $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ olacak şekilde iki farklı asal ayrışımının olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki bu şartı sağlayan en küçük tamsayı n olsun. Dikkat edilirse $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ayrışımına göre $p_1 | n$ olduğu için $p_1 | a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ olmalıdır. Önerme 10.1 (s. 186) gereğince, p_1 asalı a_i sayılarından birini böler. Fakat a_i asal olduğu için $p_1 = a_i$ olmalıdır. Buna göre $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ sayısı $p_1 = a_i$ ile bölünerek

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdots a_l$$

elde edilir. Bu iki asal ayrışım birbirinden farklıdır çünkü n tamsayısının verilen asal ayrışımları farklıdır. (Hatırlanacağı üzere p_1 ve a_i asalları eşittir. Bu nedenle, çarpanlardaki farklılık yukarıdaki ayrışımlarda devam eder.) Ancak yukarıda verilen $p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ sayısı n'den küçüktür. Bu durum, farklı asal ayrışımlara sahip en küçük tamsayının n olması ile çelişir. ■

En küçük aksine örnekle ispat yöntemi hakkında bir uyarı yapalım. Diğer ders kitaplarındaki veya matematik makalelerindeki ispatlarda, yazar ispatın başlangıcında en küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanacağını genellikle söylemez. Bunun yerine, ispatı okuyarak hangi yöntemin kullanıldığına dair bir çıkarım yapmanız gerekir. Aslında bu uyarı *tüm* ispat yöntemleri için geçerlidir. Matematik öğrenmeye devam ettikçe, bir ispatı analiz etmek için gereken yeteneği yavaş yavaş kazanacak ve açıkça belirtilmese bile hangi ispat türünün kullanıldığını anlayacaksınız. Bu yolda hayal kırıklıkları sizi bekliyor ancak bunlar gözünüzü korkutmasın. Hayal kırıklığı, yapmaya değer olan şeylerin doğal bir parçasıdır.

10.5 Fibonacci Sayıları

Leonardo Pisano, şimdiki bilinen adıyla Fibonacci, 1175 yılı civarında şu an İtalya olan yerde doğan bir matematikçidir. En önemli eseri, Ortaçağ Avrupası'nın Roma rakamlarından Hint-Arap sayı sistemine yavaş geçiş sürecinde bir katalizör olarak kabul edilen *Liber Abaci* adlı kitabıdır. Fakat günümüzde, kitabında tanımladığı ve kendi adını taşıyan bir sayı dizisi sayesinde daha iyi bilinmektedir. **Fibonacci dizisi**

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ldots$$

ile verilir. Bu dizideki sayılar **Fibonacci sayıları** olarak adlandırılır. İlk iki sayı 1 ile 1'dir. Bunlardan sonraki sayılar, kendilerinden hemen önce gelen iki sayının toplamıdır. Örneğin $3+5=8$ ve $5+8=13$ vb. olur. Bu dizinin n−yinci terimini F_n ile gösterelim. Buna göre $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_7=13$ olur ve böyle devam eder. Dikkat edilirse Fibonacci dizisininin tamamı $F_1=1$, $F_2=1$ ve $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ koşulları tarafından belirlenir.

Fibonacci dizisinin burada verilme nedeni şudur: Herkesin bunu bilmesi gerekir ve tümevarım problemleri için geniş bir örnek yelpazesi sunar. Doğada şaşırtıcı bir sıklıkta görünen bu dizi, gizemli örüntüler ve gizli yapılarla doludur. Bunların bazıları, örnekler ile alıştırmalarda açıklanacaktır.

Burada vurgulamak gerekirse $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ (veya buna denk olan $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$) şartı tümevarım için harika bir kurgudur. Bu kurgu, dizinin önceki terimlerine bakarak F_n hakkında bilgi edinebileceğimizi söyler. Fibonacci dizisi hakkındaki bir şeyi tümevarım yöntemiyle ispatlarken, bir noktada $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ denkleminin kullanılması beklenmelidir.

İlk örnekte, her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1}^2-F_{n+1}F_n-F_n^2=(-1)^n$ olduğunu gösterelim. Örneğin $n=5$ ise $F_6^2-F_6F_5-F_5^2=8^2-8\cdot5-5^2=64-40-25=-1=(-1)^n$ olur.

Önerme 10.4 Fibonacci dizisi $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ kuralını sağlar.

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

1. Eğer $n = 1$ ise $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_2^2 - F_2F_1 - F_1^2 = 1^2 - 1 \cdot 1 - 1^2 = -1 = (-1)^1 = (-1)^n$ olur. O hâlde $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliği $n = 1$ için doğrudur.
2. Şimdi $k \in \mathbb{N}$ olsun. Doğrudan ispat yöntemiyle $F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)^k$ ise $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)^k$ olsun. Dikkatli bir şekilde $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ üzerinde çalışarak, bunun gerçekten de $(-1)^{k+1}$ sayısına eşit olduğunu gösterelim. Bu işi $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ eşitliğini kullanarak yapalım.

$$\begin{aligned}
F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)^2 - (F_{k+1} + F_k)F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= F_{k+1}^2 + 2F_{k+1}F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 - F_kF_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= -F_{k+1}^2 + F_{k+1}F_k + F_k^2 \\
&= -(F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2) \\
&= -(-1)^k \qquad \text{(tümevarım hipotezi)} \\
&= (-1)(-1)^k \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Buna göre $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ bulunur.

Tümevarım yöntemine göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ olur. ■

Şimdi biraz ara verelim ve ispatladığımız sonucun anlamını düşünelim. $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ denkleminin her iki tarafını F_n^2 ile bölerek

$$\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2 - \frac{F_{n+1}}{F_n} - 1 = \frac{(-1)^n}{F_n^2}$$

buluruz. Dikkat edilirse n çok büyük olduğunda, bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra çok yakındır. Eşitliğin sol tarafı ise $x^2 - x - 1 = 0$ polinomunun F_{n+1}/F_n ifadesindeki değeridir. O hâlde n arttıkça F_{n+1}/F_n oranı $x^2 - x - 1 = 0$ polinomunun bir köküne yaklaşır. Bu polinomun kökleri $\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$ ile verilir. $F_{n+1}/F_n > 1$ olduğu için bu oran $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *pozitif* köküne yaklaşmalıdır. Böylelikle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{10.1}$$

yazılabilir. Bunu hızlıca kontrol edebiliriz. Örneğin $F_{14}/F_{13} \approx 1.618025$ ve $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$ olur. Bu iki sayının ondalık kısımlarının ilk dört rakamı, 13 gibi küçük bir sayı için bile aynıdır.

Yukarıda elde ettiğimiz $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına **altın oran** denir ve bu sayının klasik sanat, mimari ve doğada ortaya çıkışına dair çok fazla spekülasyon vardır. Bir teoriye göre antik Yunan tapınağı Partenon ve Büyük Mısır Piramitleri altın oran dikkate alınarak dizayn edilmiştir.

Fakat biz burada ispatlanabilen şeylerle ilgilenmekteyiz. Bu bölümü, Fibonacci dizisinin pek çok açıdan geometrik bir diziye bezediğini gözlemleyerek bitirelim. Hatırlanacağı üzere ilk terimi a ve ortak oranı r olan **geometrik dizi**

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ ar^6,\ ar^7,\ ar^8,\ldots$$

formundadır. Bu dizinin birinciden farklı herhangi bir terimi, kendisinden önceki terimin r katıdır. Genel olarak bu dizinin $n-$yinci terimi $G_n = ar^n$ ile verilir. Ayrıca $G_{n+1}/G_n = r$ olur. Eşitlik 10.1, $F_{n+1}/F_n \approx \Phi$ olduğunu söyler. Fibonacci dizisi, geometrik bir dizi olmasa da, ortak oranı Φ olan geometrik dizi gibi davranır. Ne kadar "dışa" gidilirse benzerlik oranı o kadar artar.

Ünite 10 Alıştırmaları

Aşağıdaki önermeleri tümevarım, güçlü tümevarım ya da en küçük aksine örnek yöntemlerininden birini kullanarak ispatlayınız.

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n^2+n}{2}$ olduğunu ispatlayınız.
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğunu ispatlayınız.
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ olduğunu ispatlayınız.
4. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ olur.
5. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-2$ olur.
6. Her n pozitif tamsayısı için $\sum\limits_{i=1}^{n}(8i-5) = 4n^2-n$ olduğunu ispatlayınız.
7. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+\cdots+n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ olur.
8. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!} = 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ olur.
9. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $24 \mid (5^{2n}-1)$ olduğunu ispatlayınız.
10. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $3 \mid (5^{2n}-1)$ olduğunu ispatlayınız.
11. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $3 \mid (n^3+5n+6)$ olduğunu ispatlayınız.
12. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $9 \mid (4^{3n}+8)$ olduğunu ispatlayınız.
13. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $6 \mid (n^3-n)$ olduğunu ispatlayınız.
14. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $5 \mid 2^n a$ ise $5 \mid a$ olduğunu ispatlayınız.

15. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$ olur.

16. Her n pozitif tamsayısı için $2^n+1\le 3^n$ olduğunu ispatlayınız.

17. Kabul edelim ki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bir E evrensel kümesinin altkümeleri ve $n \ge 2$ olsun. Buna göre $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$ olduğunu ispatlayınız.

18. Kabul edelim ki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bir E evrensel kümesinin altkümeleri ve $n \ge 2$ olsun. Buna göre $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ olduğunu ispatlayınız.

19. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$ olduğunu ispatlayınız.

20. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ olduğunu ispatlayınız.

21. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}\ge 1+\frac{n}{2}$ olur.
(Not: Bu problem, harmonik serinin ilk 2^n teriminin en az $1+\frac{n}{2}$ olduğunu iddia eder. Bu nedenle harmonik seri ıraksaktır.)

22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ge \frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}$ olur.

23. Matematiksel tümevarım yöntemini kullanarak Binom teoremini (Teorem 3.1, s. 92) ispatlayınız. Bunun için 90. sayfadaki Eşitlik (3.3) işinize yarayabilir.

24. Her n doğal sayısı için $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ olduğunu ispatlayınız.

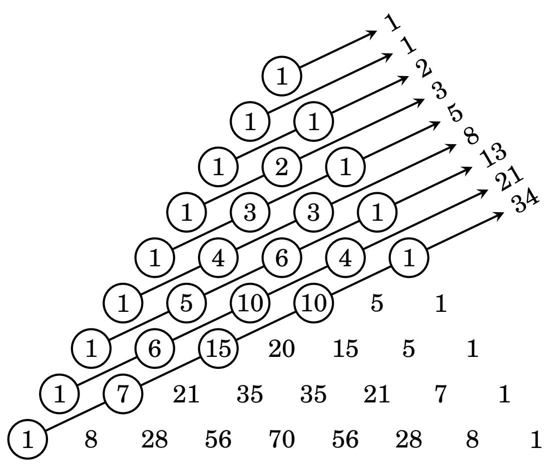
25. Fibonacci dizisi $F_1+F_2+F_3+F_4+\cdots+F_n = F_{n+2}-1$ koşulunu sağlar. İspatlayınız.

26. Fibonacci dizisi $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$ koşulunu sağlar. İspatlayınız.

27. Fibonacci dizisi $F_1+F_3+F_5+F_7+\cdots+F_{2n-1} = F_{2n}$ koşulunu sağlar. İspatlayınız.

28. Fibonacci dizisi $F_2+F_4+F_6+F_8+\cdots+F_{2n} = F_{2n+1}-1$ koşulunu sağlar. İspatlayınız.

29. Pascal üçgeninin aşağıda belirtilen köşegenlerindeki sayıların toplamı birer Fibonacci sayısıdır. Bu örüntünün sonsuza dek sürdüğünü ispatlayınız.



30. Eğer $n-$yinci Fibonacci sayısı F_n ise

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

olduğunu ispatlayınız.

31. Eğer $1 \leq r \leq n$ ise $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ olduğunu ispatlayınız.

32. İkili sayma sisteminde, ardışık 1 içermeyen n basamaklı sayıların sayısının F_{n+2} olduğunu ispatlayınız. Örneğin, $n = 2$ için bu şekilde üç tane sayı vardır $(00, 01, 10)$ ve $3 = F_{2+2} = F_4$ olur. Benzer şekilde $n = 3$ için bu şekilde beş tane sayı vardır $(000, 001, 010, 100, 101)$ ve $5 = F_{3+2} = F_5$ olur.

33. Düzlemde, herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen (sonsuz uzunluktaki) n tane doğru verilsin. Bu doğruların, düzlemi $\frac{n^2+n+2}{2}$ tane bölgeye ayırdığını gösteriniz.

34. Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1}-3}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

35. Eğer n çift ve k tek doğal sayı ise $\binom{n}{k}$ sayısının çift olduğunu ispatlayınız.

36. Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2^k - 1$ ise Pascal üçgeninin $n-$yinci satırındaki her terimin tek olduğunu ispatlayınız.

37. Eğer $m, n \in \mathbb{N}$ ise $\sum_{k=0}^{n} k\binom{m+k}{m} = n\binom{m+n+1}{m+1} - \binom{m+n+1}{m+2}$ olduğunu ispatlayınız.

38. Negatif olmayan m, n ve p tamsayıları için $\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$ olduğunu gösteriniz.

(Bu eşitlik Bölüm 3.10'daki 7. alıştırmada verilmiştir. Orada kombinatoryal ispat kullanmanız istenmiştir. Burada tümevarım kullanmanız istenmektedir.)

39. Negatif olmayan m, n ve p tamsayıları için $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{p+k} = \binom{m+n}{m+p}$ olduğunu gösteriniz.

(Bu eşitlik Bölüm 3.10'daki 8. alıştırmada verilmiştir. Orada kombinatoryal ispat kullanmanız istenmiştir. Burada tümevarım kullanmanız istenmektedir.)

40. Eğer n pozitif bir tamsayı ise $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ olduğunu ispatlayınız. Bunun için Alıştırma 38'i kullanabilirsiniz. (Bu eşitlik, kombinatoryal ispat kullanılarak Bölüm 3.10'da ispatlanmıştır.)

41. Eğer n ve k negatif olmayan tamsayılar ise $\binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ olduğunu ispatlayınız.

42. İspatlayınız: F_n çifttir ancak ve ancak $3 \mid n$.

Kısım IV

Bağıntı, Fonksiyon ve Kardinalite

ÜNİTE 11

Bağıntı

Matematikte, iki tane varlık arasında bir bağ kurmanın sonsuz sayıda yolu vardır. Örneğin, aşağıdaki matematiksel önermelere bakalım.

$$\begin{array}{ccccccc} 5<10 & 5\le 5 & 6=\frac{30}{5} & 5\,|\,80 & 7>4 & x\neq y & 8\nmid 3 \\ a\equiv b\,(\mathrm{mod}\,n) & 6\in\mathbb{Z} & X\subseteq Y & \pi\approx 3.14 & 0\ge -1 & \sqrt{2}\notin\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\not\subseteq\mathbb{N} \end{array}$$

Bunların her birinde, iki tane matematiksel varlık bir sembolün karşıt taraflarına yazılmıştır. Bu sembol, iki varlık arasındaki bağ olarak yorumlanabilir. Bu bağlamda $<, \le, =, |, \nmid, \ge, >, \in, \subset$ vb. sembollere birer *bağıntı* denir çünkü bunlar varlıklar arasındaki bağları ifade eder.

Bağıntılar çok önemlidir. Aslında matematikten tüm bağıntıların çıkarılması hâlinde, geriye kayda değer olan çok az şeyin kalacağını kabul etmek gerekir. Bu nedenle bağıntıların çok iyi anlaşılması gerekir. Bu ünitenin amacı, buna yardımcı olmaktır.

Bağıntıların her birine tek tek odaklanmak yerine (ki birbirinden farklı sonsuz sayıda bağıntı olduğu için bu imkânsızdır) bunların *tümünü* kapsayan genel bir teori geliştirelim. Bu teoriyi anlamak, özel bir bağıntıyı anlayıp onun üzerinde çalışmak için gerekli altyapıyı bize kazandıracaktır.

11.1 Bağıntı

Bağıntının teorik tanımını vermeden önce, bizi buna hazırlayacak bir örneğe bakalım. Bu örnek, bizi doğal olarak bağıntı tanımına yönlendirecektir.

$A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesini ele alalım. (Bu kümeyi özel yapan bir neden yoktur. Elemanları sayılar olan herhangi bir küme aynı işi görür.) A'nın elemanları "<" sembolü ile kendi aralarında karşılaştırılabilir. Örneğin $1<4$, $2<3$, $2<4$ vb. olur. Bunları anlamakta sorun yaşamayız çünkü sıralama işlemi kafamıza doğal bir şekilde yerleşmiştir. Şimdi, tamsayıların anlamı (veya aralarındaki ilişki) hakkında hiçbir fikri olmayan ancak ayrıntılar konusunda son derece takıntılı bir aptal dahiye[1] bunu anlatmak zorunda olduğunuzu hayal edin. Öğrenciniz için aşağıdaki kümeyi yazmak faydalı olabilir:

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}.$$

[1]Matematik, müzik vb. özel bir alanda olağanüstü yeteneğe sahip zihinsel engelli insan.

Bu küme, A'nın elemanları arasındaki $<$ bağıntısını farklı bir biçimde ifade eder. Bir (a,b) sıralı ikilisinin R'de olması için gerek ve yeter şart $a < b$ olmasıdır. Eğer $3 < 4$ ifadesinin doğru olup olmadığı sorulursa öğrenciniz R kümesini tarayıp $(3,4)$ sıralı ikilisini bulur ve böylece $3 < 4$ ifadesinin doğru olduğuna karar verir. Eğer $5 < 2$ olup olmadığı sorulursa $(5,2)$ sıralı ikilisinin R'de *olmadığını* görür. O hâlde $5 \not< 2$ olmalıdır. Sonuç olarak $A \times A$ kümesinin R altkümesi, A üzerinde tanımlı $<$ bağıntısını tamamen belirler.

İlk bakışta basit görünse de bağıntı tanımının arkasındaki ana fikir budur. Bu tanım sadece $A = \{1,2,3,4,5\}$ üstündeki $<$ bağıntısını değil, *herhangi* bir küme üzerindeki *herhangi* bir bağıntıyı tarif edecek kadar geneldir.

Tanım 11.1 A kümesi üzerindeki bir **bağıntı**, $R \subseteq A \times A$ altkümesidir. Genel olarak $(x,y) \in R$ önermesi xRy biçiminde; $(x,y) \notin R$ önermesi ise $x\not R y$ biçiminde kısaca yazılır.

Dikkat edilirse bağıntı bir kümedir. Bu nedenle kümeler hakkındaki bilgilerimizi kullanarak bağıntıları araştırabiliriz. Bağıntının teorik kısmına girmeden önce birkaç örneğe göz atalım.

Örnek 11.1 $A = \{1,2,3,4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeyi ele alalım:

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(3,2),(3,1),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\} \subseteq A \times A.$$

Tanım 11.1'e göre R kümesi A üzerinde bir bağıntıdır. Örneğin $(1,1) \in R$ olduğu için $1R1$ yazarız. Benzer şekilde $2R1$, $2R2$ vb. olur. Fakat $(3,4) \notin R$ olduğu için $3\not R 4$ olur. Dikkat edilirse bu bağıntı A üzerindeki $\geq$ bağıntısıdır.

Ünite 1'de, matematiğin tamamının kümelerle ifade edilebileceğini iddia etmiştik. Bu iddianın ne kadar yerinde bir iddia olduğunu bir düşünün! Büyük-veya-eşit olma bağıntısı artık bir R kümesidir. (Örtülü olarak bunu $\geq = R$ biçiminde ifade edebiliriz.)

Örnek 11.2 $A = \{1,2,3,4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım:

$$S = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\} \subseteq A \times A.$$

Burada $1S1$, $1S3$, $4S2$ fakat $3\not S 4$ ve $2\not S 1$ olur. S kümesi hangi anlama gelir? Bunun *"aynı paritelidir"* anlamına geldiğini düşünebiliriz. Böylece $1S1$ ifadesi "1 *aynı paritelidir* 1" ve $4S2$ ise "4 *aynı paritelidir* 2" anlamına gelir.

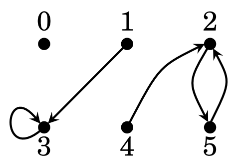
Örnek 11.3 Önceki iki örnekte verilen R ve S bağıntılarını düşünelim. $R \cap S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(4,4),(4,2)\} \subseteq A \times A$ kümesi de A üzerinde bir bağıntıdır ve $x(R \cap S)y$ ifadesi *"$x \geq y$ ve x aynı paritelidir y"* anlamına gelir.

Örnek 11.4 $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeyi ele alalım:

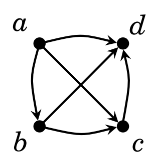
$$U = \{(1,3),(3,3),(5,2),(2,5),(4,2)\} \subseteq B \times B.$$

$U \subseteq B \times B$ olduğu için U kümesi B üzerinde bir bağıntıdır. Bu bağıntıya bir "anlam" bulmakta zorlanabilirsiniz. Bir bağıntının her zaman bir anlamı olması gerekmez. $B \times B$ kümesinden rastgele seçilen bir altküme, bilinen birşeyi tanımlasın ya da tanımlamasın, daima bir bağıntıdır.

Bazı bağıntılar şekiller ile temsil edilebilir. Örneğin, yukarıda verilen U bağıntısı için B'nin elemanları noktalar ile gösterilir ve x elemanından y elemanına çizilen bir ok ile $(x,y) \in U$ önermesi temsil edilir. Bu ok, x ile y arasındaki *bağın* grafiksel sembolüdür. İşte U bağıntısının şekli:



Alfabede x harfinin y harfinden önce gelmesi xRy ile temsil edilsin. Buna göre aşağıdaki şekil, $A = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde tanımlı R bağıntısını gösterir. Tanım 11.1'e göre bu bağıntı $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$ ile verilir. Bu şeklin, bağıntıyı kümeden daha iyi ifade ettiğini hissedebilirsiniz. Bunlar, aynı şeyi farklı biçimde ifade etme yollarıdır. Bazı bağıntıları temsil etmek için küme yerine şekil çizmek daha kullanışlıdır.



Bağıntıları görsel olarak temsil etmek için bu tür diyagramlar kullanışlı olsa da bunların sınırlamaları vardır. Örneğin A ve R sonsuz olsaydı böyle bir diyagram çizmek imkânsız olurdu. Böyle durumlarda, R kümesini ifade etmek için ortak özellik yöntemi işe yarayabilir. Şimdi birkaç örnek verelim.

Örnek 11.5 $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ altkümesini ele alalım. Bu küme, $A = \mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $>$ bağıntısıdır. Bu bağıntı sonsuzdur çünkü $x > y$ olacak şekilde sonsuz sayıda x ve y vardır.

Örnek 11.6 $R = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $=$ bağıntısıdır çünkü xRy ile $x = y$ aynı anlama gelir. Buna göre R kümesi, reel sayıların eşitliğini ifade eden bağıntıdır.

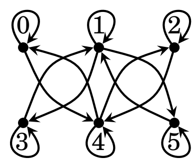
Bölüm 11.1 Alıştırmaları

1. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ olsun. A üzerinde tanımlı $>$ bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.

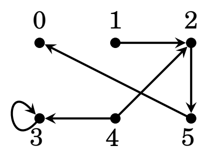
2. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ olsun. A üzerinde tanımlı $\mid$ (böler) bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.

3. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ olsun. A üzerinde tanımlı $\geq$ bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.

4. Aşağıda, A üzerinde tanımlı bir R bağıntısı verilmiştir. A ve R kümelerini yazınız.



5. Aşağıda, A üzerinde tanımlı bir R bağıntısı verilmiştir. A ve R kümelerini yazınız.



6. $A = \mathbb{Z}$ üzerinde 5 modülüne göre denk olmak bir bağıntıdır. Bu bağıntıya göre xRy ile $x \equiv y \pmod 5$ aynı anlamına gelir. Ortak özellik yöntemiyle R kümesini yazınız.

7. $A = \mathbb{Z}$ üzerindeki $<$ bağıntısını, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesinin bir R altkümesi olarak yazınız. Bu küme sonsuz olduğu için ortak özellik yöntemi kullanılmalıdır.

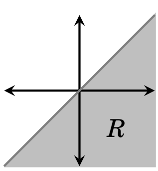
8. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ olsun. Dikkat edileceği üzere $\emptyset \subseteq A \times A$ olduğu için A üzerindeki bağıntılardan bir tanesi de $R = \emptyset$ ile verilir. Bu bağıntının diyagramını çiziniz.

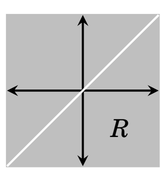
9. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi üzerinde birbirinden farklı kaç bağıntı tanımlanabilir?

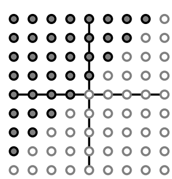
10. $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Bu küme, $\mathbb{R}$ üzerindeki hangi bağıntıdır? Açıklayınız.

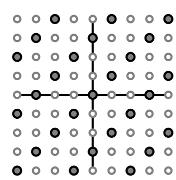
11. Sonlu bir A kümesi üzerinde birbirinden farklı kaç tane bağıntı tanımlanabilir?

Aşağıdaki alıştırmalarda, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümelerinin R ile verilen altkümeleri gri renkte gösterilmiştir. Bunların her birindeki R altkümesi, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}$ üzerindeki bilindik bir bağıntıya karşılık gelir. Bu bağıntıları belirtiniz.

12. 

13. 

14. 

15. 

11.2 Bağıntıların Özellikleri

Eğer R bir bağıntı ise xRy bir *açık önermedir.* Yani ya doğrudur ya yanlıştır. Örneğin $5 < 10$ doğrudur fakat $10 < 5$ yanlıştır. (Dikkat edilirse + ve benzeri işlemler birer bağıntı değildir. Mesela $5+10$ doğru veya yanlış olmaktan ziyade bir sayıdır.) Bağıntılar D/Y değerlerine sahip olduğu için mantıksal operatörler ile birleştirilebilir. Örneğin $xRy \Rightarrow yRx$ bir önerme veya açık önermedir. Bunun doğru ya da yanlış olması x ve y değerlerine bağlıdır.

Bazı bağıntılar diğerlerinde olmayan özelliklere sahiptir. Örneğin $\mathbb{Z}$ üzerindeki $\leq$ bağıntısı, her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \leq x$ şartını sağlar. Fakat $<$ bağıntısı bu şartı sağlamaz çünkü $x < x$ önermesi hiçbir zaman doğru değildir. Bir bağıntının sahip olabileceği üç temel özellik aşağıda verilmiştir.

Tanım 11.2 Bir A kümesi üzerinde tanımlı R bağıntısı verilsin.

1. Her $x \in A$ için xRx ise R bağıntısı **yansımalıdır**.
   Bir başka deyişle $\forall x \in A, xRx$ ise R yansıyandır.
2. Her $x, y \in A$ için xRy iken yRx ise R bağıntısı **simetriktir**.
   Bir başka deyişle $\forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$ ise R simetriktir.
3. Eğer xRy ve yRz iken xRz ise R bağıntısı **geçişmelidir**.
   Bir başka deyişle $\forall x, y, z \in A, \big((xRy) \wedge (yRz)\big) \Rightarrow xRz$ ise R geçişmelidir.

Örnek olarak $A = \mathbb{Z}$ kümesini ele alalım. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\leq$, $=$ ve $|$ bağıntıları yansımalıdır çünkü her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \leq x$, $x = x$ ve $x | x$ önermelerinin hepsi doğrudur. Fakat $>$, $<$, $\neq$ ve $\nmid$ bağıntıları yansımalı değildir çünkü $x < x$, $x > x$, $x \neq x$ ve $x \nmid x$ önermelerinden hiçbiri doğru değildir.

Dikkat edilirse $\neq$ bağıntısı simetriktir çünkü $x \neq y$ ise $y \neq x$ olmalıdır. Aynı şekilde $x = y$ ise $y = x$ olduğu için $=$ bağıntısı da simetriktir.

Diğer taraftan $\leq$ bağıntısı simetrik **değildir** çünkü $x \leq y$ olması daima $y \leq x$ olmasını gerektirmez. Örneğin $5 \leq 6$ doğrudur fakat $6 \leq 5$ yanlıştır. Dikkat edileceği üzere bazı x ve y tamsayıları (örneğin $x = 2$ ve $y = 2$) için $(x \leq y) \Rightarrow (y \leq x)$ önermesi *doğrudur* ancak yine de $\leq$ simetrik değildir çünkü bu önerme *bütün* x ve y tamsayıları için doğru değildir.

Ne zaman ki $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsa o zaman $x \leq z$ olacağı için $\leq$ bağıntısı geçişmelidir. Benzer şekilde $<$, $\geq$, $>$ ve $=$ bağıntıları geçişmelidir. Aşağıdaki tabloyu inceleyip, neyin neden oraya yazıldığı konusunda emin olunuz.

$\mathbb{Z}$ üzerindeki bağıntılar	$<$	$\leq$	$=$	$\mid$	$\nmid$	$\neq$
Yansıma	hayır	evet	evet	evet	hayır	hayır
Simetri	hayır	hayır	evet	hayır	hayır	evet
Geçişme	evet	evet	evet	evet	hayır	hayır

Örnek 11.7 $A = \{b,c,d,e\}$ üzerindeki bir R bağıntısı aşağıda verilmiştir:

$$R = \{(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)\}.$$

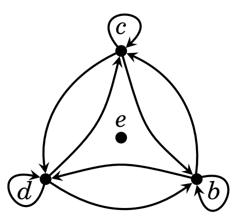
Bu bağıntı yansıyan **değildir** çünkü bRb, cRc ve dRd doğrudur fakat eRe doğru **değildir**. Bir bağıntının yansıyan olması için xRx önermesi *her* $x \in A$ için doğru olmak zorundadır.

Bu bağıntı simetriktir çünkü ne zaman xRy olsa o zaman yRx olur. Bir başka deyişle bRc ve cRb; bRd ve dRb; dRc ve cRd doğrudur. Örneğin R'den (c,b) sıralı ikilisi çıkarılırsa bu bağıntı simetri özelliğini kaybeder.

Bu bağıntı geçişmelidir ama bunu kontrol etmek biraz vakit alır. Bunun için $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ önermesi her $x,y,z \in A$ için doğrulanmalıdır. Örneğin $x = b$, $y = c$ ve $z = d$ ise $(bRc \wedge cRd) \Rightarrow bRd$ önermesi $(D \wedge D) \Rightarrow D$ formundaki doğru bir önermedir. Benzer şekilde $(bRd \wedge dRc) \Rightarrow bRc$ de $(D \wedge D) \Rightarrow D$ formunda doğru bir önermedir. Eğer $x = b$, $y = e$ ve $z = c$ ise $(bRe \wedge eRc) \Rightarrow bRc$ önermesi $(Y \wedge Y) \Rightarrow D$ formundadır ve bu *yine* doğrudur. Çok eğlenceli olmasa da A'dan seçilen herhangi üç x,y,z elemanının tüm kombinasyonları için $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ doğrulanabilir. (En azından bunların birkaçını deneyin.)

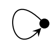
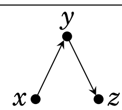
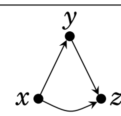
Örnek 11.7'deki R bağıntısına bir anlam yüklenebilir: xRy ifadesi, x ve y harflerin ikisinin birden ünsüz olması olarak düşünülebilir. Buna göre b ve c ünsüz oldukları için bRc olur. Fakat b ve e harflerinin ikisi birden ünsüz olmadığı için $b \not R e$ olur. Bu açıdan bakıldığında R bağıntısının geçişmeli olduğu hemen görülür. Eğer x ile y iki ünsüz ve y ile z iki ünsüz ise o zaman x ile z mutlaka iki ünsüz olmalıdır. Bu yaklaşım, daha sonra göreceğimiz bir noktaya işaret eder: Bir bağıntının manasını bilmek, onu anlamamıza ve ilgili önermeleri ispatlamamıza yardımcı olabilir.

Aşağıda, R bağıntısına ait diyagram verilmiştir. Dikkat edileceği üzere R bağıntısının küme ile gösteriminden çok da açık olmayan birçok özelliği bu diyagramdan hemen görülebilir. Örneğin e noktası bir düğüme sahip olmadığı için R yansımalı değildir. Böylece $e \not R e$ olur.



Şekil 11.1: Örnek 11.7'de verilen R bağıntısı

Bir bağıntının diyagramını kullanarak onun çeşitli özelliklerini nasıl tespit edeceğimiz aşağıda özetlenmiştir. Bunu Şekil 11.1 ile karşılaştırınız.

1.	Her x noktasında…	$\bullet\ x$	…bir düğüm var ise…		…bağıntı **yansıyandır**.
2.	Bir x noktasından bir y noktasına ok olduğunda…		…y noktasından x noktasına bir ok var ise…		…bağıntı **simetriktir**.
3.	Eğer x'ten y'ye ve y'den de z'ye birer ok varken…		…x'ten z'ye bir ok var ise…		…bağıntı **geçişmelidir**.
	(Geçişmeli bağıntıda $x = z$ ise yani x'ten y'ye ve y'den de x'e birer ok var ise…		…bu, x noktasında düğüm olduğu…		…anlamına gelir.)

Yukarıdaki 3 nolu kutunun alt kısmındaki diyagramı göz önüne alalım. Geçişme özelliği, $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow xRx$ olmasını gerektirir. Buna göre geçişmeli bir bağıntıda xRy ve yRx ise xRx olur. Yani x noktasında bir düğüm vardır. Ayrıca $(yRx \wedge xRy) \Rightarrow yRy$ olacağı için y noktasında da bir düğüm vardır.

Bu biçimdeki görsel araçlar aydınlatıcı olsa da bunların kullanım alanı sınırlıdır çünkü bağıntıların büyük bir kısmı diyagramlarla temsil edilemeyecek kadar büyük ve karmaşıktır. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\equiv (\bmod n)$ bağıntısı için bir diyagram çizmek imkânsızdır. Böyle bir bağıntıyı teorik (ve daha az görsel) bir şekilde açıklamak en iyisidir.

Şimdi $\equiv (\bmod n)$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim. Bu işi bir diyagram kullanarak yapamayacağımız bellidir. Bu nedenle Tanım 11.2 ve $\equiv (\bmod n)$ bağıntısının özelliklerini kullanarak yapalım. Bağıntılar hakkındaki önermelerin nasıl **ispatlanacağını** gösteren bu örneğe özellikle dikkat edilmelidir.

Örnek 11.8 Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız.

Önerme Bir $n \in \mathbb{N}$ verilsin. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\equiv (\bmod n)$ bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişmelidir.

İspat. İlk önce $\equiv (\bmod n)$ bağıntısının yansıyan olduğunu gösterelim. Her $x \in \mathbb{Z}$ için $n \mid 0$ olduğundan $n \mid (x - x)$ yazılabilir. O hâlde n modülüne göre denklik tanımından $x \equiv x \pmod{n}$ elde edilir. Bu, her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv x \pmod{n}$ olduğunu gösterir. Buna göre $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı yansıyandır.

Sırada $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının simetrik olduğunu gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv y \pmod{n}$ ise $y \equiv x \pmod{n}$ olduğunu göstermeliyiz. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Eğer $x \equiv y \pmod{n}$ olduğu kabul edilirse n modülüne göre denklik tanımından $n \mid (x-y)$ yazılabilir. Bölünebilme tanımına göre $x - y = na$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı -1 ile çarpılarak $y-x = n(-a)$ bulunur. Buradan $n \mid (y-x)$ elde edilir. Bu, $y \equiv x \pmod{n}$ anlamına gelir. O hâlde $x \equiv y \pmod{n}$ olduğunda $y \equiv x \pmod{n}$ olmalıdır. Buna göre $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı simetriktir.

Son olarak $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının geçişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için eğer $x \equiv y \pmod{n}$ ve $y \equiv z \pmod{n}$ ise $x \equiv z \pmod{n}$ olduğunu göstermeliyiz. Yine doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $x \equiv y \pmod{n}$ ve $y \equiv z \pmod{n}$ olsun. Bu, $n \mid (x-y)$ ve $n \mid (y-z)$ anlamına gelir. Buradan $x-y = na$ ve $y - z = nb$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak $x-z = na+nb$ elde edilir. Buradan $x-z = n(a+b)$ ve böylece $n \mid (x-z)$ elde edilir. Sonuç olarak $x \equiv z \pmod{n}$ bulunur. O hâlde $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı geçişmelidir.

Yukarıdaki son üç paragraf $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Matematik öğrenmeye devam ettikçe yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin değişik birçok konuda özel anlam taşıdıklarını göreceksiniz. Önümüzdeki bölüm, sizi buna hazırlamak için bunların ileri düzey özelliklerini inceler. Ama önce aşağıdaki alıştırmaların bazıları üzerinde çalışın.

Bölüm 11.2 Alıştırmaları

1. $A = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ bağıntısını ele alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

2. $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $R = \{(a,b),(a,c),(c,c),(b,b),(c,b),(b,c)\}$ bağıntısını ele alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

3. $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $R = \{(a,b),(a,c),(c,b),(b,c)\}$ bağıntısını ele alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

4. $A = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),\\ (a,d),(d,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)\}$$

bağıntısını ele alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

5. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $R = \{(0,0),(\sqrt{2},0),(0,\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

6. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $R = \{(x,x) : x \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız. Bu bağıntı, bildiğimiz hangi bağıntıdır?

7. $A = \{a,b\}$ üzerinde 16 farklı bağıntı tanımlanabilir. Bunların hepsini açıklayınız. (Her biri için bir diyagram çizmek yeterlidir ancak noktaların isimlerini yazmayı unutmayınız.) Bunlardan hangileri yansıyandır? Simetriktir? Geçişmelidir?

8. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak $|x-y| < 1$" biçiminde bir bağıntı tanımlansın. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bunlardan biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız. Bu bağıntı, bildiğimiz hangi bağıntıdır?

9. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak x ile y aynı paritelidir" biçiminde bir bağıntı tanımlansın. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Sağlanmayan bir özellik var ise sebebini açıklayınız. Bu bağıntı, bildiğimiz hangi bağıntıdır?

10. Kabul edelim ki $A \neq \emptyset$ olsun. Dikkat edilirse $\emptyset \subseteq A \times A$ olduğu için A üzerindeki bağıntılardan biri de $R = \emptyset$ ile verilir. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Sağlanmayan bir özellik var ise sebebini açıklayınız.

11. $A = \{a,b,c,d\}$ ve $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ olsun. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Sağlanmayan bir özellik var ise sebebini açıklayınız.

12. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\mid$ (böler) bağıntısının yansımalı ve geçişmeli oluğunu ispatlayınız. (Eğer nasıl yapacağınızı bilmiyorsanız Örnek 11.8 size yardımcı olabilir.)

13. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlayınız.

14. Bir A kümesi üzerinde tanımlı, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı verilsin. Eğer her $x \in A$ için aRx olacak şekilde bir $a \in A$ var ise R bağıntısının yansımalı olduğunu ispatlayınız.

15. İspatlayın ya da çürütün: Simetrik ve geçişmeli bir bağıntı yansıyandır.

16. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak $x^2 \equiv y^2 \pmod 4$" biçiminde bir bağıntı tanımlansın. R bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlayınız.

17. Yukarıda verilen 8. alıştırmayı biraz değiştirerek $\mathbb{Z}$ üzerinde "$x \sim y$ ancak ve ancak $|x-y| \leq 1$" biçiminde yeni bir bağıntı tanımlayalım. Buna göre $\sim$ bağıntısı yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir?

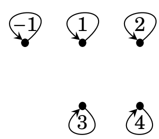
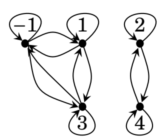
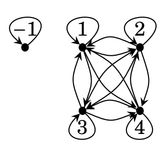
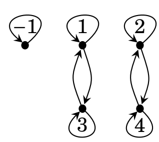
18. Sayfa 205'de verilen tabloya göre $\mathbb{Z}$ üzerindeki bağıntılar yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin çeşitli kombinasyonlarına sahip olabilir. Toplamda $2^3 = 8$ tane olan bu kombinasyonların 5 tanesi tabloda verilmiştir. (Tablo, $\leq$ ve $\mid$ bağıntıları için aynı tipte kombinasyon içermektedir.) Eksik olan üç kombinasyon için $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı bağıntı örnekleri bularak tabloyu tamamlayınız.

11.3 Denklik Bağıntısı

Tamsayılar (ya da herhangi bir A) kümesi üzerindeki = bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişmelidir. Yansıyan, simetrik ve geçişmeli olan başka birçok bağıntı vardır. Matematikte, bu özelliklerin üçüne birden sahip olan bağıntılara çok sık rastlanır ve bunlar çoğu zaman oldukça önemli roller oynar. (Örneğin, = bağıntısı için bu kesinlikle doğrudur.) Bu tür bağıntıların özel bir adı vardır. Bunlara *denklik bağıntıları* denir.

Tanım 11.3 Bir A kümesi üzerinde tanımlı; yansıyan, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısına **denklik bağıntısı** denir.

Örneğin $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ üzerinde tanımlı ve birbirinden farklı R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntıları Şekil 11.2'de verilmiştir. Bunlardan her birinin kendine özgü bir anlamı vardır. Mesela ikinci satırdaki R_2 bağıntısı *"aynı paritelidir"* anlamına gelir. Buna göre $1R3$ ifadesi "1 *aynı paritelidir* 3" anlamına gelir.

R bağıntısı	Diyagram	Denklik sınıfları (öbür sayfaya bkz.)
"eşittir" (=) $R_1 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$		$\{-1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$
"aynı paritelidir" $R_2 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(-1,1),(1,-1),(-1,3),(3,-1),$ $(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1,1,3\}$, $\{2,4\}$
"aynı işaretlidir" $R_3 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),$ $(3,4),(4,3),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1\}$, $\{1,2,3,4\}$
"aynı paritelidir ve aynı işaretlidir" $R_4 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1\}$, $\{1,3\}$, $\{2,4\}$

Şekil 11.2: $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı bağıntı örnekleri

Yukarıdaki diyagramlardan her bir bağıntının yansıyan, simetrik ve geçişmeli yani bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla görülebilir. Örneğin R_1 simetriktir çünkü $xR_1y \Rightarrow yR_1x$ önermesi $x = y$ için $D \Rightarrow D$ (doğru) ve $x \neq y$ için $Y \Rightarrow Y$ (yine doğru) formunda bir önemedir. Benzer şekilde R_1 geçişmelidir çünkü $(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$ önermesi daima $D \Rightarrow D$, $Y \Rightarrow D$ veya $Y \Rightarrow Y$ formunda olan doğru bir önermedir. (Bunu kontrol et.)

Şekil 11.2'deki örneklerden görüleceği üzere bir küme üzerindeki denklik bağıntısı, o kümenin elemanları arasında ister gerçek manada isterse de (aynı pariteye sahip olmak gibi) zayıf bir manada "aynılık" ölçüsünü ifade etme eğilimindedir.

Şimdi önemli bir tanım verme vakti geldi. Bir A kümesi üzerindeki R denklik bağıntısı, A kümesini *denklik sınıfları* olarak adlandırılan altkümelere ayırır. İşte tanım:

Tanım 11.4 Bir A kümesi üzerinde R denklik bağıntısı verilsin. Bir $a \in A$ ile denk olan elemanlarından oluşan $\{x \in A : xRa\}$ altkümesine, a **elemanını içeren denklik sınıfı** denir. Bu sınıf $[a]$ ile gösterilir. Böylelikle a elemanını içeren denklik sınıfı $[a] = \{x \in A : xRa\}$ kümesidir.

Örnek 11.9 Şekil 11.2'de verilen R_1 bağıntısını ele alalım. Örneğin, 2 tamsayısını içeren denklik sınıfı $[2] = \{x \in A : xR_12\}$ kümesidir. Bu bağıntı, 2 ile sadece kendisi arasında bir bağ kurduğu için $[2] = \{2\}$ olur. Bu bağıntının diğer denklik sınıfları $[-1] = \{-1\}$, $[1] = \{1\}$, $[3] = \{3\}$ ve $[4] = \{4\}$ kümeleridir. O hâlde R_1 bağıntısına ait beş tane ayrık denklik sınıfı vardır.

Örnek 11.10 Şekil 11.2'de verilen R_2 bağıntısını ele alalım. Örneğin, 2 tamsayısını içeren denklik sınıfı $[2] = \{x \in A : xR_22\}$ kümesidir. Bu bağıntı, 2 tamsayısıyla 2 ve 4 arasında bir bağ kurduğu için $[2] = \{2,4\}$ olur. Ayrıca, $[4] = \{x \in A : xR_24\} = \{2,4\}$ olur ve buradan $[2] = [4]$ elde edilir. R_2 bağıntısının başka bir denklik sınıfı da $[1] = \{x \in A : xR_21\} = \{-1,1,3\}$ kümesidir. Buna ek olarak $[1] = [-1] = [3] = \{-1,1,3\}$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak R_2 bağıntısına ait iki adet denklik sınıfı vardır. Bunlar $\{2,4\}$ ve $\{-1,1,3\}$ kümeleridir.

Örnek 11.11 Şekil 11.2'de verilen R_4 bağıntısına ait üç tane denklik sınıfı vardır. Bunlar $[-1] = \{-1\}$, $[1] = [3] = \{1,3\}$ ve $[2] = [4] = \{2,4\}$ kümeleridir.

Şekil 11.2 sizi yanıltmasın. Bir denklik sınıfı her zaman noktalar ve oklardan oluşan bir diyagram ile temsil edilemez. Bunun farkında olmak önemlidir. Örneğin, reel sayılardaki eşitliği ifade eden $R = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ gibi oldukça basit bir bağıntı bile çizilemeyecek kadar büyüktür. Bu bağıntıya ait diyagram, her reel sayı için bir nokta ve o nokta için bir düğüm gerektirir. Açıkçası bu noktalar ve düğümler çizilemeyecek kadar çoktur.

Bu bölümü, sonsuz kümeler üzerinde tanımlı birkaç denklik bağıntısı vererek bitirelim.

Örnek 11.12 Reel katsayılı tüm polinomların kümesi P olsun. P üzerinde "Her $f(x), g(x) \in P$ için $f(x) R g(x)$ olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının aynı dereceli olmasıdır" biçiminde bir bağıntı tanımlayalım. Buna göre örneğin $(x^2+3x-4) R (3x^2-2)$ ve $(x^3+3x^2-4) \not{R} (3x^2-2)$ olur. Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu görmek için hızlı bir zihinsel kontrol yeterlidir. (Bunu yapınız.) R bağıntısının denklik sınıflarını tarif etmek kolaydır. Örneğin $[3x^2+2]$ denklik sınıfı, derecesi $3x^2+2$ ile aynı olan polinomların kümesidir. Bir başka deyişle, derecesi 2 olan tüm polinomların kümesidir. Bu kümeyi, $[3x^2+2] = \{ax^2+bx+c : a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ biçiminde yazabiliriz.

Örnek 11.13 Herhangi bir n doğal sayısına karşılık; $\equiv (\operatorname{mod} n)$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu Örnek 11.8'de ispatladık. Yeni tabirle, $\equiv (\operatorname{mod} n)$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Şimdi $n = 3$ seçelim ve $\equiv (\operatorname{mod} 3)$ denklik bağıntısının denklik sınıflarını bulalım. Bunun için makul olan, 0 tamsayısını içeren denklik sınıfıyla işe başlamaktır:

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-0)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}.$$

Böylelikle [0] sınıfı, 3 tamsayısının tüm katlarından oluşur. (Bir başka ifadeyle [0] sınıfı, 3 ile bölündüğünde 0 kalanını veren tüm tamsayıların kümesidir.) Üstelik $[0] = [3] = [6] = [9]$ vb. olur. Dikkat edilirse [0] kümesi, 1 tamsayısını içermez. Bu yüzden şimdi [1] denklik sınıfına bakalım:

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-1)\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}.$$

O hâlde [1] denklik sınıfı, 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren tamsayıların tümünden oluşur. Dikkat edilirse 2 tamsayısı, ne [0] ne de [1] sınıfına aittir. Bu nedenle şimdi [2] denklik sınıfını bulalım:

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-2)\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

O hâlde [2] denklik sınıfı, 3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren tamsayıların tümünden oluşur. Dikkat edileceği üzere herhangi bir tamsayı [0], [1] veya [2] denklik sınıflarından birine aittir. Böylece denklik sınıflarının hepsini listelemiş olduk. Sonuç olarak, $\equiv (\operatorname{mod} 3)$ denklik bağıntısına ait tamı tamına üç tane denklik sınıfı vardır.

Benzer şekilde, $\equiv (\operatorname{mod} n)$ denklik bağıntısına ait n tane denklik sınıfı vardır. Bunlar $[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$ kümeleridir.

Denklik bağıntıları oldukça önemlidir. Aslında farkına olmadan, hayatınızın büyük kısmında denklik bağıntılarını kullandınız. Örneğin, kesiler ve denklik bağıntıları sezgisel olarak sarmaş dolaştır. Bunu görmek için *en sade hâlde olmak zorunda olmayan* tüm kesirlerin kümesini ele alalım:

$$F = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Bunu $\mathbb{Q}$ yerine, olası tüm kesirlerin kümesi olarak düşünelim. Örneğin $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{4}$ kesilerinin payları ve paydaları birbirinden farklı olduğu için bunları F kümesinin (eşit olmayan) farklı elemanları olarak görebiliriz. Elbette ki $\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{4}$ sayıları eşittir. Ancak bunlar *farklı* kesirlerdir. Buna göre $\frac{1}{2}, \frac{2}{4} \in F$ fakat $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{4}$ olur. (Yani bunlar F kümesinde eşit olmayan elemanlardır.)

Şimdi F üzerinde "$\frac{a}{b} \doteq \frac{c}{d}$ ancak ve ancak $ad = bc$" biçiminde bir bağıntı tanımlayalım. Örneğin $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ olduğu için $\frac{1}{2} \doteq \frac{2}{4}$ olur. Benzer şekilde $-15 \cdot 2 = -3 \cdot 10$ olduğu için $\frac{-15}{-3} \doteq \frac{10}{2}$ olur. Bu bağlamda $\frac{a}{b} \doteq \frac{c}{d}$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ sayılarının eşit olmasıdır. Bu nedenle $\doteq$ bağıntısı farklı kesirlerin sayısal olarak eşit olmasını modeller.

Dikkat edilirse $\doteq$ bağıntısı F üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bağıntı yansıyandır çünkü herhangi bir $\frac{a}{b} \in F$ için $ab = ba$ olması $\frac{a}{b} \doteq \frac{a}{b}$ olmasını garanti eder. Bunun simetrik olduğunu görmek için $\frac{a}{b} \doteq \frac{c}{d}$ olduğunu kabul edelim. Buradan $ad = bc$ veya $cb = da$ yazılabilir. Bu da $\frac{c}{d} \doteq \frac{a}{b}$ anlamına gelir. Geçişme özelliği ise 16. alıştırma olarak size bırakılmıştır.

Sonuç olarak, günlük hayatta kullandığımız kesirlerdeki eşitlik kavramı bir denklik bağıntısıdır. Örneğin $\frac{2}{3}$ kesrinin denklik sınıfı, sayısal değeri $\frac{2}{3}$ olan bütün kesirlerin kümesidir. Bu küme $\left\{\frac{2n}{3n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ ile verilir. Özetlersek, eşit kesirleri yıllarca bu denklik bağıntısı altında aynı denklik sınıfında bir araya topladık.

Analiz derslerinde de farkında olmadan denklik sınıflarını öğrendiniz. Bir f fonksiyonun ters türevi $\int f(x)\,dx$ ile gösterilir. Ters türev, türevi $f(x)$ olan $F(x) + C$ formundaki fonksiyonların kümesidir. Bu küme, integrallenebilir fonksiyonlar kümesinde bir denklik sınıfıdır. Farkları sabit olan iki fonksiyon aynı denklik sınıfındadır. (Bunlar, ileri matematik derslerinde daha açık bir şekilde göreceğiniz bazı ince noktalardır.)

Bu örnekler önemli bir noktayı vurgular: Denklik bağıntıları, matematiğin birçok alanında kullanılır. Bu durum özellikle de denklik bağıntıların (kesirler ve ters türevler gibi) doğal ve geniş kapsamlı yapılar için doğru bir araç olduğu ileri matematik alanları için geçerlidir. Denklik bağıntılarını şimdi öğrenmek, ileride alacağınız dersleri daha iyi anlamanızı sağlar.

Bölüm 11.3 Alıştırmaları

1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ üzerinde tanımlı bir R denklik bağıntısı aşağıda verilmiştir:
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$
Bu bağıntıya ait denklik sınıflarını listeleyiniz.
2. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde iki tane denklik sınıfı olan R denklik bağıntısı verilsin. Eğer aRd, bRc ve eRd ise bu bağıntıyı bir küme olarak yazınız.
3. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde üç tane denklik sınıfı olan R denklik bağıntısı verilsin. Eğer aRd ve bRc ise bu bağıntıyı bir küme olarak yazınız.
4. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Eğer aRd, bRc, eRa ve cRe ise bu bağıntının kaç tane denklik sınıfı vardır?
5. $A = \{a,b\}$ kümesi üzerinde iki tane denklik bağıntısı tanımlanabilir. Bunları tarif ediniz. Bunu diyagramlar çizerek yapabilirsiniz.
6. $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde beş tane farklı denklik bağıntısı tanımlanabilir. Bunların hepsini tarif ediniz. Bunu diyagramlar çizerek yapabilirsiniz.
7. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak $3x-5y$ çifttir" biçiminde tanımlı R bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve bunun denklik sınıflarını bulunuz.
8. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak x^2+y^2 çifttir" biçiminde tanımlı R bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve bunun denklik sınıflarını bulunuz.
9. $\mathbb{Z}$ üzerinde "xRy ancak ve ancak $4|(x+3y)$" biçiminde tanımlı bir R bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve bunun denklik sınıflarını bulunuz.
10. Bir A kümesi üzerinde tanımlı R ve S denklik bağıntıları verilsin. Buna göre $R \cap S$ kümesinin de bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. (Örnek olarak R_2, R_3 ve R_4 için $R_2 \cap R_3 = R_4$ özelliğine sahip olan Şekil 11.2'ye bakabilirsiniz.)
11. İspatlayın ya da çürütün: Eğer R bağıntısı, sonsuz bir A kümesi üzerinde tanımlı ise R'nin sonsuz sayıda denklik sınıfı vardır.
12. İspatlayın ya da çürütün: Eğer R ve S bir A kümesi üzerinde denklik bağıntıları ise $R \cup S$ kümesi de A üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
13. Sonlu bir A kümesi üzerinde tanımlı ve her bir denklik sınıfının kardinalitesi m olan bir R denklik bağıntısı verilsin. $|R|$ sayısını m ve $|A|$ türünden ifade ediniz.
14. Sonlu bir A kümesi üzerinde yansıyan ve simetrik bir R bağıntısı verilsin. Aynı küme üzerinde "xSy ancak ve ancak xRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, $x_3Rx_4, \ldots, x_{n-1}Rx_n$ ve x_nRy olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ vardır" biçiminde bir S bağıntısı tanımlansın. Buna göre S'nin bir denklik bağıntısı ve $R \subseteq S$ olduğunu gösteriniz. Ayrıca A üzerinde tanımlı denklik bağıntılarından, R bağıntısını kapsayan en küçük tek bağıntının S olduğunu ispatlayınız.
15. Sonlu bir A kümesi üzerinde dört tane denklik sınıfı olan bir R denklik bağıntısı verilsin. A üzerinde $R \subseteq S$ şartını sağlayan kaç farklı S denklik bağıntısı vardır?
16. Sayfa 213'de tanımlanan $\doteq$ bağıntısının geçişmeli olduğunu gösteriniz.

11.4 Denklik Sınıfları ve Ayrışım

Bu bölümde, denklik sınıflarına ait çeşitli özellikleri bir araya toplayacağız.

İlk önce "$[a]=[b]$ olması için gerek ve yeter şart aRb olmasıdır" sonucunu ispatlayalım. Bu sonuç, $[a]=[b]$ olduğu her zaman aRb olduğunu ve bunun karşıtını garanti eder. Bazı durumlarda, bilgilerin birinden diğerine geçiş yapmak faydalı olabilir. Hatta çoğu zaman kendinizi bunu yaparken bulabilirsiniz. Bu sonucu ispatlarken, denklik bağıntısının (yansıma, simetri ve geçişme) özelliklerinin üçünü de kullanacağımıza dikkat edilmelidir. Ayrıca $[a]$ ve $[b]$ kümeleriyle ilgilenirken, Ünite 8'de (Kümeleri İçeren İspatlar) verilen bazı metodları kullanmak gerekecektir.

Teorem 11.1 Bir A kümesi üzerinde R denklik bağıntısı verilsin ve $a,b \in A$ olsun. Buna göre, $[a]=[b]$ olması için gerek ve yeter şart aRb olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $[a]=[b]$ olsun. R yansıyan olduğu için aRa önermesi doğrudur. Buna göre $a \in \{x \in A : xRa\} = [a] = [b] = \{x \in A : xRb\}$ yazılabilir. Dikkat edilirse $a \in \{x \in A : xRb\}$ olması aRb anlamına gelir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Karşıt olarak, kabul edelim ki aRb olsun. Buna göre $[a]=[b]$ olduğunu göstermek gerekir. Bunu, $[a] \subseteq [b]$ ve $[b] \subseteq [a]$ olduğunu göstererek yapalım.

Önce, $[a] \subseteq [b]$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $c \in [a] = \{x \in A : xRa\}$ olsun. O hâlde cRa doğrudur. R geçişmeli oluğu için cRa ve aRb önermeleri cRb olmasını gerektirir. Fakat cRb önermesi $c \in \{x \in A : xRb\} = [b]$ anlamına gelir. Böylelikle $c \in [a]$ ise $c \in [b]$ yani $[a] \subseteq [b]$ elde edilir.

Şimdi $[b] \subseteq [a]$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $c \in [b] = \{x \in A : xRb\}$ olsun. O hâlde cRb doğrudur. Yaptığımız ilk kabul gereği aRb ve R simetrik olduğu için bRa olur. R geçişmeli olduğu için cRb ve bRa önermeleri cRa olmasını gerektirir. Fakat cRa olması $c \in \{x \in A : xRa\} = [a]$ anlamına gelir. Böylelikle $c \in [b]$ ise $c \in [a]$ yani $[b] \subseteq [a]$ elde edilir.

Önceki iki paragraftan $[a]=[b]$ bulunur. ■

Teorem 11.1'e örnek olarak, Örnek 11.13'te verilen $\equiv \pmod 3$ bağıntısının denklik sınıfları ele alalım. Bu sınıflardan biri aşağıda verilmiştir:

$$[-3] = [9] = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}.$$

Teorem 11.1'de öngörüldüğü gibi $[-3]=[9]$ ve $-3 \equiv 9 \pmod 3$ olduğuna dikkat ediniz. Teorem, bunun tüm denklik bağıntıları için doğru olduğunu garanti eder. Gelecekte, kendinizi sıklıkla Teorem 11.1'deki bu sonucu kullanırken bulabilirsiniz. Zamanla doğal ve bilindik bir hâle gelecek olan bu sonucu, bir teorem bile olduğunu düşünmeden, otomatik olarak kullanacaksınız.

Şimdi bir küme üzerinde tanımlı denklik bağıntısının, o kümeyi çeşitli denklik sınıflarına ayırdığını görelim. Bu tür durumlar için kullanılan özel iki kelime vardır. Bu kelimeler ile daha sonra alacağınız matematik derslerinde de karşılaşacağınız için onlardan burada bahsedelim.

Tanım 11.5 Bir A kümesinin boştan farklı altkümelerinden oluşan ve elemanlarının birleşimleri A, ikişerli kesişimleri $\emptyset$ olan kümeye A kümesinin bir **ayrışımı** veya **parçalanışı** denir.

Örnek 11.14 $A = \{a,b,c,d\}$ olsun. A kümesinin ayrışımlarından bir tanesi $\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ kümesidir. Bu ayrışım $\{a,b\}$, $\{c\}$ ve $\{d\}$ altkümelerinden oluşur. Bu üç altkümenin birleşimi A, ikişerli kesişimleri $\emptyset$'dir.

A kümesinin diğer ayrışımlarından birkaçı aşağıda verilmiştir:

$$\{\{a,b\},\{c,d\}\}, \quad \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}, \quad \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}, \quad \{\{a,b,c,d\}\}.$$

Kabaca söylemek gerekirse ayrışım A kümesinin parçalara ayrılmasıdır.

Örnek 11.15 Şekil 11.2'de verilen denklik bağıntılarını göz önüne alalım. Her biri $A = \{-1,1,2,3,4\}$ üzerinde tanımlı olan bu bağıntılara ait denklik sınıfları şeklin sağ tarafında listelenmiştir. Dikkat edileceği üzere denklik sınıfları, her durumda, A kümesinin bir ayrışımını oluşturur. Örneğin R_1 bağıntısı, A kümesinin $\{\{-1\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ ayrışımını verir. Aynı şekilde R_2 bağıntısına ait denklik sınıfları $\{\{-1,1,3\},\{2,4\}\}$ ayrışımını oluşturur.

Örnek 11.16 Örnek 11.13'de, $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\equiv (\bmod 3)$ denklik bağıntısına ait denklik sınıflarının bulunduğunu hatırlayınız. Bu denklik sınıfları, $\mathbb{Z}$ kümesinin aşağıdaki ayrışımını verir:

$$\Big\{\{\ldots,-3,0,3,6,9,\ldots\},\{\ldots,-2,1,4,7,10,\ldots\},\{\ldots,-1,2,5,8,11,\ldots\}\Big\}.$$

Bu ayrışımı daha derli toplu olarak $\{[0],[1],[2]\}$ şeklinde yazabiliriz.

Verdiğimiz örnekler ve edindiğimiz tecrübe; bir denklik bağıntısına ait denklik sınıflarının, o kümenin bir ayrışımını oluşturduğu izlenimini verir. Bu gerçekten de böyledir. Şimdi bunu ispatlayalım.

Teorem 11.2 Bir A kümesi üzerinde R denklik bağıntısı verilsin. Bu bağıntının $\{[a] : a \in A\}$ ile verilen denklik sınıflarının kümesi, A'nın bir ayrışımıdır.

İspat. A kümesine ait bir ayrışımın $\{[a] : a \in A\}$ olduğunu ispatlamak için iki şey gösterilmelidir: Tüm $[a]$ denklik sınıflarının birleşimi A kümesidir ve $[a] \neq [b]$ ise $[a] \cap [b] = \emptyset$ olur.

Tüm $[a]$ kümelerinin birleşimi $\bigcup_{a\in A}[a]$ olduğu için öncelikle $\bigcup_{a\in A}[a]=A$ olduğunu kanıtlamak gerekir. Kabul edelim ki $x\in\bigcup_{a\in A}[a]$ olsun. En az bir $a\in A$ için $x\in[a]$ vardır. Ama $[a]\subseteq A$ olduğu için $x\in A$ ve böylece $\bigcup_{a\in A}[a]\subseteq A$ bulunur. Öbür yandan, kabul edelim ki $x\in A$ olsun. Dikkat edilirse $x\in[x]$ olduğundan bir $a\in A$ için $x\in[a]$ (yani $a=x$) yazılabilir. Buradan $x\in\bigcup_{a\in A}[a]$ ve böylece $A\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]$ bulunur. Sonuç olarak $A=\bigcup_{a\in A}[a]$ elde edilir.

Şimdi $[a]\neq[b]$ ise $[a]\cap[b]=\emptyset$ olduğunu gösterelim. Bunu dolaylı ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $[a]\cap[b]=\emptyset$ ifadesi doğru olmasın. Buna göre $c\in[a]\cap[b]$ olacak şekilde bir c vardır. Buradan $c\in[a]$ ve $c\in[b]$ olur. R simetrik olduğu için $c\in[a]$ ifadesi, önce cRa sonra aRc olmasını gerektirir. Ayrıca $c\in[b]$ olması cRb anlamına gelir. R geçişmeli olduğu için aRc ve cRb önermeleri aRb olmasını gerektirir. Teorem 11.1'den dolayı aRb önermesi $[a]=[b]$ anlamına gelir. Böylelikle $[a]\neq[b]$ doğru değildir.

Yukarıda, tüm denklik sınıflarının birleşiminin A ve iki farklı denklik sınıfının kesişiminin $\emptyset$ olduğunu gösterdik. O hâlde denklik sınıflarının kümesi, A'nın bir ayrışımıdır. ■

Teorem 11.2'ye göre A üzerinde tanımlı herhangi bir denklik bağıntısına ait denklik sınıfları, A'nın bir ayrışımını oluşturur. Buna karşılık A kümesinin herhangi bir ayrışımı "xRy ancak ve ancak x ile y aynı denklik sınıfındadır" biçiminde bir denklik bağıntısı tanımlar. (Bkz: Aşağıdaki 4. alıştırma.) Denklik bağıntıları ve ayrışımlar gerçekten de aynı şeye farklı açıdan bakma yollarıdır. Gelecekteki matematiksel çalışmalarınızda bu iki bakış arasında kolaylıkla geçiş yapabileceğinizi göreceksiniz.

Bölüm 11.4 Alıştırmaları

1. $A=\{a,b\}$ kümesinin bütün ayrışımlarını listeleyiniz. Cevabınızı Bölüm 11.3'deki 5. alıştırmanın cevabı ile karşılaştırınız.

2. $A=\{a,b,c\}$ kümesinin bütün ayrışımlarını listeleyiniz. Cevabınızı Bölüm 11.3'deki 6. alıştırmanın cevabı ile karşılaştırınız.

3. $\mathbb{Z}$ kümesinin $\equiv(\text{mod}\,4)$ denklik bağıntısına karşılık gelen ayrışımını yazınız.

4. Bir A kümesine ait P ayrışımı verilsin. A üzerinde "xRy ancak ve ancak $x,y\in X$ olacak şekilde bir $X\in P$ vardır" ile tanımlı R bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu ve R'nin denklik sınıflarının kümesinin P olduğunu gösteriniz.

5. Tamsayılar kümesine ait $P=\Big\{\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\},\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}\Big\}$ ayrışımını ele alalım. Denklik sınıfları P'nin elemanları olan denklik bağıntısı R olsun. Buna göre R denklik bağıntısı, tanıdık olan hangi bağıntıdır?

6. Tamsayılar kümesine ait $P=\Big\{\{0\},\{-1,1\},\{-2,2\},\{-3,3\},\{-4,4\},\ldots\Big\}$ ayrışımını ele alalım. Denklik sınıfları P'nin elemanları olan R denklik bağıntısını yazınız.

11.5 Tamsayılarda n Modülü

Örnek 11.8'de her $n \in \mathbb{N}$ için $\equiv (\text{mod}\, n)$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterdik. Dolayısıyla bu bir denklik bağıntısıdır. Matematikte oldukça önemli bir yere sahip olan bu bağıntının bazı özellikleri bu bölümde açığa çıkaralım.

Konuyu basit tutmak için $n = 5$ olduğunu kabul edelim. İlk önce, $\equiv (\text{mod}\, 5)$ bağıntısının denklik sınıflarına bakalım. Bu bağıntının aşağıda verildiği gibi beş tane denklik sınıfı vardır:

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 (\text{mod}\, 5)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-0)\} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\},\\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 (\text{mod}\, 5)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-1)\} = \{\ldots, -9, -4, 0, 6, 11, 16, \ldots\},\\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 (\text{mod}\, 5)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-2)\} = \{\ldots, -8, -3, 0, 7, 12, 17, \ldots\},\\
[3] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3 (\text{mod}\, 5)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-3)\} = \{\ldots, -7, -2, 0, 8, 13, 18, \ldots\},\\
[4] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4 (\text{mod}\, 5)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-4)\} = \{\ldots, -6, -1, 0, 9, 14, 19, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Bu sınıfların, tamsayılar kümesini nasıl ayrıştırdığına dikkat ediniz. Denklik sınıfları [0], [1], [2], [3] ve [4] olarak adlandırılmıştır ancak bildiğiniz üzere bunu yapmanın başka yolları vardır. Örneğin $[0] = [5] = [10] = [15]$ ve $[1] = [6] = [4]$ vb. olur. Biz yine de bu beş denklik sınıfını [0], [1], [2], [3] ve [4] ile belirtelim.

Yukarıdaki beş sınıf, $\mathbb{Z}_5$ ile gösterilen bir küme oluşturur. Bu nedenle

$$\mathbb{Z}_5 = \Big\{[0], [1], [2], [3], [4]\Big\}$$

kümesi, beş tane kümeden oluşan bir kümedir. $\mathbb{Z}_5$ hakkında ilginç olan şey, elemanları birer küme olsa da (sayı değil) onları toplamak ve çarpmak mümkündür. Bunun için $\mathbb{Z}_5$ üzerinde aşağıdaki toplama ve çapma kurallarını tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
[a] + [b] &= [a+b]\\
[a] \cdot [b] &= [a \cdot b]
\end{aligned}$$

Örneğin $[2] + [1] = [2+1] = [3]$ ve $[2] \cdot [2] = [2 \cdot 2] = [4]$ olur. Bu işlemleri yaparken, sayıları değil *kümeleri* (daha doğrusu denklik sınıflarını) topladığımızı ve çarptığımızı vurgulamak gerekir. Böylece $\mathbb{Z}_5$'in iki elemanı toplanarak (veya çarplarak) yine $\mathbb{Z}_5$'in bir başka elemanı elde edilir.

İşte biraz karmaşık bir örnek: $[2] + [3] = [5]$. Bu sefer $[2], [3] \in \mathbb{Z}_5$ toplanıp $[5] \in \mathbb{Z}_5$ elde edilir. Şüphesiz ki bu çok kolay oldu. Ancak elde edilen [5] cevabı $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ kümesinde açık bir şekilde listelenmemiştir. Bu nedenle, $[5] = [0]$ olduğu için $[2] + [3] = [0]$ yazmak daha uygundur.

Aynı mantıkla, $[6]=[1]\in\mathbb{Z}_5$ olduğu için $[2]\cdot[3]=[6]$ işlemi $[2]\cdot[3]=[1]$ şeklinde yazılır. Bu konudaki becerilerinizi, $\mathbb{Z}_5$ için aşağıda verilen toplam ve çarpım tablolarını doğrulayarak test edebilirsiniz.

$+$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

$\mathbb{Z}_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ kümesine **tamsayıların 5 modülüne göre kalan sınıflarının kümesi** denir. Yukarıdaki tablolardan görüleceği üzere $\mathbb{Z}_5$ sadece bir kümeden ibaret değildir. Kendi toplama ve çarpma kuralları olan küçük bir sayı sistemidir. Bu hâliyle, toplama ve çarpma işlemleriyle donatılmış $\mathbb{Z}$ kümesine benzer.

Burada seçilen 5 sayısının olağan dışı bir özelliği yoktur. $\mathbb{Z}_n$ kümesi, herhangi bir n doğal sayısı için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 11.6 Eğer $n\in\mathbb{N}$ ise $\equiv \pmod n$ bağıntısına ait denklik sınıfları $[0],[1],[2],\ldots,[n-1]$ kümeleridir. $\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$ kümesine, **tamsayıların n modülüne göre kalan sınıfları** denir. $\mathbb{Z}_n$ kümesinin elemanları $[a]+[b]=[a+b]$ kuralı ile toplanır, $[a]\cdot[b]=[ab]$ kuralı ile çarpılır.

Her n doğal sayısı için $\mathbb{Z}_n$ kümesi, n tane elemanı olan bir sayı sistemidir. Bu sistem; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ sistemlerinde var olan cebirsel özelliklerin birçoğuna sahiptir. Örneğin $\mathbb{Z}_n$ üzerinde, $[a]+[b]=[b]+[a]$ ve $[a]\cdot[b]=[b]\cdot[a]$ değişme özelliklerinin var olması size çok açık gelir. Buna ek olarak $[a]\cdot([b]+[c])=[a]\cdot[b]+[a]\cdot[c]$ dağılma özelliği şu şekilde doğrulanabilir:

$$\begin{aligned}[a]\cdot([b]+[c]) &= [a]\cdot[b+c]\\ &= [a(b+c)]\\ &= [ab+ac]\\ &= [ab]+[ac]\\ &= [a]\cdot[b]+[a]\cdot[c]\end{aligned}$$

Tamsayıların n modülü oldukça önemlidir. Bu sistem, bazı uygulamalar için $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{R}$ gibi diğer sayı sistemlerinden daha uygundur. Eğer soyut cebir dersi alırsanız $\mathbb{Z}_n$ ve diğer egzotik sayı sistemleriyle kapsamlı bir şekilde çalışmanız gerekir. (Böyle bir derste, denklik bağıntısı fikirinin yanı sıra, ele aldığımız tüm ispat yöntemlerini de kullanmak gerekir.)

Bu bölümü, sizi daha önce rahatsız etmiş olabilecek bir ayrıntıyı açığa kavuşturarak kapatalım. Bu ayrıntı $[a]+[b]=[a+b]$ ve $[a]\cdot[b]=[ab]$ işlemleri ile ilgilidir. Denklik sınıfları üzerinde tanımlanmış olan toplama ve çarpma işlemleri, bu sınıflardan seçilen a ve b temsilci elemanları kullanılarak yapılır. Ancak temsilci elemanları seçmenin bir çok farklı yolu olduğu için bu tanımlarının tutarlı olup olmadığını merak edebilirsiniz. Örneğin Alice ve Bob, [2] ve [3] elemanlarını $\mathbb{Z}_5$ sisteminde çarpmak istesin. Alice bu işlemi $[2]\cdot[3]=[6]=[1]$ şeklinde yaparsa cevap olarak [1] bulur. Bob ise bunu farklı bir şekilde yapabilir: $[2]=[7]$ ve $[3]=[8]$ olduğu için $[2]\cdot[3]$ işlemini $[7]\cdot[8]=[56]$ şeklide yaparsa $56 \equiv 1 \pmod 5$ olduğu için o da cevap olarak $[56]=[1]$ bulur. Burada şu soru akla gelir: Verdikleri cevap her zaman aynı mıdır yoksa şans eseri mi aynı çıkmıştır?

Gerçek şu ki çarpma işlemi $\mathbb{Z}_n$ üzerinde nasıl yapılırsa yapılsın, cevap hep aynıdır. Bunu görmek için Alice ve Bob'un $[a],[b]\in\mathbb{Z}_n$ elemanlarını çarpmak istediklerini ancak $[a]=[a']$ ve $[b]=[b']$ olduğunu kabul edelim. Alice ve Bob çarpma işlemini şu şekilde yapar:

$$\begin{array}{rl} \text{Alice:} & [a]\cdot[b]=[ab], \\ \text{Bob:} & [a']\cdot[b']=[a'b']. \end{array}$$

Şimdi, verdikleri cevapların aynı yani $[ab]=[a'b']$ olduğunu gösterelim. Teorem 11.1 gereğince $[a]=[a']$ ise $a=a' \pmod n$ olur. Buradan $n \mid (a-a')$ yazabilir. O hâlde $a-a'=nk$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Benzer şekilde $[b]=[b']$ ise $b\equiv b' \pmod n$ olur. Buradan $n \mid (b-b')$ yazılabilir. O hâlde $b-b'=nl$ olacak şekilde bir l tamsayısı vardır. Buna göre $a=a'+nk$ ve $b=b'+nl$ elde edilir. Bu iki sayı çarpılarak

$$\begin{aligned} ab &= (a'+nk)(b'+nl) \\ &= a'b'+a'nl+nkb'+n^2kl \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $ab-a'b'=n(a'l+kb'+nkl)$ yazılabilir. Son eşitlik, $n \mid (ab-a'b')$ yani $ab\equiv a'b' \pmod n$ olduğunu gösterir. Buradan $[ab]=[a'b']$ sonucuna ulaşılır. Neticede Alice ve Bob hep aynı cevabı elde eder. Sonuç olarak $\mathbb{Z}_n$ üzerinde tanımlı çarpma işlemi tutarlıdır.

Aşağıdaki 8. alıştımada, $\mathbb{Z}_n$ üzerindeki toplama işleminin tutarlı olduğunu göstermeniz istenecektir.

Bölüm 11.5 Alıştırmaları

1. $\mathbb{Z}_2$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

2. $\mathbb{Z}_3$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

3. $\mathbb{Z}_4$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

4. $\mathbb{Z}_6$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

5. Eğer $[a],[b] \in \mathbb{Z}_5$ ve $[a]\cdot[b] = 0$ ise $[a] = 0$ veya $[b] = 0$ olması gerekir mi?

6. Eğer $[a],[b] \in \mathbb{Z}_6$ ve $[a]\cdot[b] = 0$ ise $[a] = 0$ veya $[b] = 0$ olması gerekir mi?

7. Aşağıdaki işlemleri $\mathbb{Z}_9$ üzerinde yapınız. Her bir durumda cevabınızı, $0 \le a \le 8$ olmak üzere, $[a]$ biçiminde yazınız.

(a) $[8]+[8]$ **(b)** $[24]+[11]$ **(c)** $[21]\cdot[15]$ **(d)** $[8]\cdot[8]$

8. Kabul edelim ki $[a],[b] \in \mathbb{Z}_n$, $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ olsun. Alice, toplama işlemini $[a]+[b] = [a+b]$ biçiminde; Bob ise $[a']+[b'] = [a'+b']$ biçiminde yapsın. Buna göre $[a+b]$ ile $[a'+b']$ ifadelerinin aynı olduğunu gösteriniz.

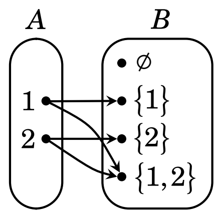
11.6 Kümeler Arasındaki Bağıntılar

Bu ünitenin başında, bir A kümesi üzerindeki bağıntıyı $R \subseteq A \times A$ altkümesi olarak tanımladık. Bu tanım, A kümesinin elemanlarının kendi aralarında karşılaştırabildiği her durumu modelleyebilecek bir alan yaratır. Bu bağlamda xRy önermesi, A kümesinin x ve y elemanlarını R sembolünün karşıt taraflarında barındırır çünkü R bağıntısı A kümesinin elemanlarını karşılaştırır. Ancak bu şekilde kullanılamayacak olan başka birçok bağıntı sembolü vardır. Örneğin $\in$ sembolü için $5 \in \mathbb{Z}$ önermesi, 5 ile $\mathbb{Z}$ arasındaki bağı ifade eder. (Bir başka deyişle 5 tamsayısı $\mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır.) Fakat 5 ile $\mathbb{Z}$, doğal bir A kümesinin elemanları değildir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için bir A kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı kavramını, *A kümesinden B kümesine bir bağıntı* şeklinde genelleyebiliriz.

Tanım 11.7 A kümesinden B kümesine bir **bağıntı**, $R \subseteq A \times B$ altkümesidir. Daha önce yapıldığı gibi $(x,y) \in R$ önermesi xRy biçiminde; $(x,y) \notin R$ önermesi ise $x \not R y$ biçiminde kısaca yazılır.

Örnek 11.17 $A = \{1,2\}$ ve $B = \mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ olsun. Bu durumda $R = \Big\{(1,\{1\}),(2,\{2\}),(1,\{1,2\}),(2,\{1,2\})\Big\} \subseteq A \times B$ altkümesi A'dan B'ye bir bağıntıdır. Buna göre $1R\{1\}$, $2R\{2\}$, $1R\{1,2\}$ ve $2R\{1,2\}$ olur. Aslında R bağıntısı, A üzerindeki $\in$ bağıntısıdır. Bir başka deyişle xRX ile $x \in X$ aynıdır.

A kümesinden B kümesine tanımlı bir bağıntının diyagramı, A üzerinde tanımlı bir bağıntının diyagramından faklıdır. A'dan B'ye tanımlı bir bağıntıda iki tane küme olduğundan bu kümeler için ayrı noktalar çizilir. Daha sonra, eğer xRy ise x noktasından y noktasına bir ok çizilir. Aşağıdaki şekil, Örnek 11.17 için çizilen diyagramı gösterir.



Şekil 11.3: A kümesinden B kümesine bir bağıntı

Bu ünitedeki fikirler, (ister $\geq$, $\leq$, $=$, $|$, $\in$ veya $\subseteq$ gibi bilinen isterse de daha egzotik olan) her bağıntının sadece bir küme olduğunu gösterir. Bu nedenle bağıntı teorisi, kümeler teorisinin bir parçasıdır. Bu fikir, önümüzdeki ünitede fonksiyonlar adı verilen önemli başka bir matematiksel yapıya temas edecektir. Bir fonksiyonu, bir kümeden başka bir kümeye özel bir bağıntı olarak tanımlayacak ve bu bağlamda her fonksiyonun gerçekte bir küme olduğunu göreceğiz.

ÜNİTE 12

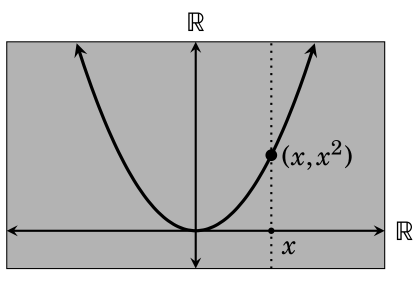
Fonksiyon

Analiz ve cebir derslerinden bildiğiniz üzere fonksiyonlar matematikte önemli bir rol oynar. Bir fonksiyonu, iki (veya daha fazla) nicelik arasındaki ilişkiyi ifade eden bir formül olarak düşünebilirsiniz. Takdir edersiniz ki nicelikler arasındaki ilişkiler tüm bilim dallarında çok önemlidir. Bu nedenle fonksiyonların önemli olduğuna dair kimsenin sizi ikna etmesine gerek yoktur. Buna rağmen fonksiyonların öneminin tam anlamıyla farkında olamayabilirsiniz. Fonksiyonlar, sayısal ilişikileri ifade etmekten çok daha ötedir. Genel anlamda, fonksiyonlar değişik matematiksel yapıları ilişkilendirebilir ve karşılaştırabilir. Matematik bilgi düzetiniz arttıkça bunu daha iyi göreceksiniz. Buna katkı sağlamak için fonksiyonları genel ve çok yönlü bir şekilde araştıracağız.

Kümeler arasındaki bağıntı kavramı (Tanım 11.7) burada önemli bir rol oynar. O kavramı hızlı bir şekilde gözden geçirmek faydalı olabilir.

12.1 Fonksiyon

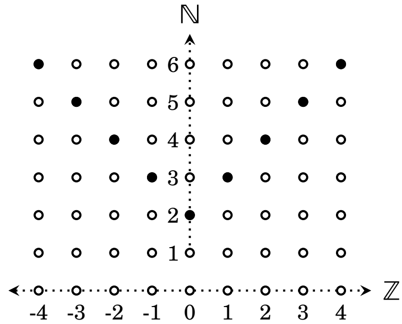
Tanıdık bir noktadan başlayalım. Reel sayılardan kendisine tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun grafiği, $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ile verilen noktalar kümesidir.



Şekil 12.1: Tanıdık bir fonksiyon

Ünite 11'de verilen bilgiler doğrultusunda, f fonksiyonuna yeni bir gözle bakabiliriz. Bu fonksiyonun grafiği olan $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ altkümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir bağıntıdır. Aslında, birazdan göreceğimiz üzere, fonksiyonlar özel bir bağıntı türüdür. Ancak net tanımını vermeden önce, başka bir örneğe daha bakalım.

Bir n tamsayısını $|n|+2$ doğal sayısına dönüştüren $f(n) = |n|+2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun grafiği, $R = \{(n, |n|+2) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ kümesidir.



Şekil 12.2: $f(n) = |n|+2$ olarak tanımlı $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu

Şekil 12.2'de R kümesi, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ üzerindeki koyu noktalarla gösterilmiştir. Dikkat edilecek olursa R sadece tek bir küme üzerinde bir bağıntı değildir. Girdi değerlerinin kümesi $\mathbb{Z}$ ile çıktı değerlerinin kümesi $\mathbb{N}$ birbirinden farklıdır. Bu nedenle, $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ grafiği *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{N}$'ye bir bağıntıdır.*

Bu örnek üç noktaya işaret eder. Birincisi, fonksiyon bir A kümesinin elemanlarını bir B kümesinin elemanlarına gönderir. (Yukarıdaki f için $A = \mathbb{Z}$ ve $B = \mathbb{N}$'dir.) İkincisi, böyle bir fonksiyona A'dan B'ye bir bağıntı gözüyle bakılabilir. Üçüncüsü, her n girdi değerine karşılık *sadece bir tane* $f(n)$ çıktı değeri vardır. Bu durum, *düşey doğru testi* olarak bilinen basit bir testle açıklanabilir: Her düşey doğru, bir fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada keser. Böylece her x girdi değeri için grafik üzerinde sadece bir tane $(x, f(x))$ noktası vardır. Şimdi bu kavramları içeren ana tanımı verelim.

Tanım 12.1 A ve B herhangi iki küme olsun. Her $a \in A$ için (a,b) formunda sadece bir tane sıralı ikili içeren $f \subseteq A \times B$ bağıntısına A kümesinden B kümesine bir **fonksiyon** denir. (Bu fonksiyon $f : A \to B$ ile gösterilir.) Ayrıca $(a,b) \in f$ önermesi kısaca $f(a) = b$ şeklinde yazılır.

Örnek 12.1 Şekil 12.2'de grafiği verilen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu ele alalım. Tanım 12.1 uyarınca f fonksiyonu, kendi grafiği üzerindeki noktaların kümesidir. Buna göre $f = \{(n, |n|+2) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ olur. $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{N}$'ye bir bağıntı olan bu küme, her $a \in \mathbb{Z}$ için, ilk koordinatı a olan sadece bir tek $(a, |a|+2)$ sıralı ikilisi içerir. Örneğin $(1,3) \in f$ olduğu için $f(1) = 3$ ve $(-3,5) \in f$ olduğu için $f(-3) = 5$ yazılır. Genel olarak $(a,b) \in f$ ifadesinden, f fonksiyonunun a girdi değerini b çıktı değerine gönderdiği anlaşılır ve bu $f(a) = b$ ile gösterilir. Bu fonksiyon, bir formülle ifade edilebilir: Her n girdisine karşılık $|n|+2$ çıktı değerini verdiği için $f(n) = |n| + 2$ yazılabilir Bu bilgilerin tamamı, cebir ve analiz derslerinde fonksiyonlar hakkında gördüklerimizle örtüşür. Aradaki tek fark, fonksiyonları aynı zamanda birer bağıntı olarak yorumlamaktır.

Tanım 12.2 Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. A kümesine, f fonksiyonunun **tanım kümesi** denir. (Tanım kümesi, olası "girdi" değerlerinin kümesidir.) B kümesine f fonksiyonunun **değer kümesi** denir. Ayrıca, $\{f(a) : a \in A\} = \{b : (a,b) \in f\}$ kümesine f fonksiyonunun **görüntü kümesi** denir. (Görüntü kümesi, olası "çıktı" değerlerinin kümesidir. Değer kümesi ise çıktılar için bir anlamda "hedef" kümesidir).

Örnek 12.1'de $f(n) = |n| + 2$ kuralı ile tanımlanan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{Z}$, değer kümesi $\mathbb{N}$'dir. Görüntü kümesi ise $\{f(a) : a \in \mathbb{Z}\} = \{|a| + 2 : a \in \mathbb{Z}\} = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ile verilir. Dikkat edilirse görüntü kümesi, değer kümesinin bir altkümesidir fakat değer kümesine eşit değildir. Genel olarak görüntü kümesi, değer kümesinin bir altkümesidir. O hâlde görüntü kümesini içeren *herhangi* bir küme değer kümesi olabilir. Bu nedenle f fonksiyonu $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ veya $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ olarak da verebilir.

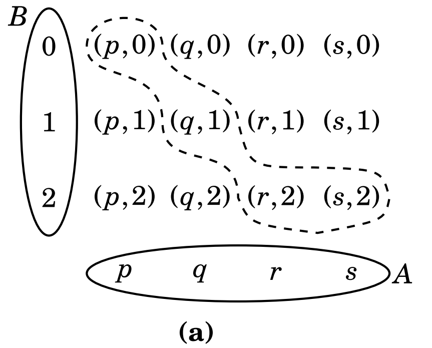
Şu ana kadar, tanım ve değer kümeleri sayılardan oluşan örnekler verdik. Sıradaki örnekte olduğu gibi bu her hep böyle olmak zorunda değildir.

Örnek 12.2 $A = \{p, q, r, s\}$ ve $B = \{0, 1, 2\}$ olsun. Aşağıdaki kümeyi ele alalım:

$$f = \{(p,0), (q,1), (r,2), (s,2)\} \subseteq A \times B.$$

A kümesindeki her eleman, f kümesindeki sıralı ikililerin ilk bileşeni olacak şekilde sadece bir kez kullanılmıştır. O hâlde $f : A \to B$ bir fonksiyondur ve $f(p) = 0$, $f(q) = 1$, $f(r) = 2$, $f(s) = 2$ yazılabilir. Dikkat edilirse f fonksiyonunun tanım kümesi $\{p, q, r, s\}$, değer ve görüntü kümeleri ise $\{0, 1, 2\}$ ile verilir.

Bu örnekte olduğu gibi eğer A ve B birer sayı kümesi değil ise $f : A \to B$ fonksiyonuna geleneksel manada bir grafik çizmek zordur. Şekil 12.3(a)'da f fonksiyonuna bir grafik çizmek için teşebbüste bulunulmuştur. Bunun için A ve B kümeleri sanki x ve y eksenleriymiş gibi sıralanıp $A \times B$ kartezyen çarpımı düzgün bir şekilde şekile yerleştirilmiştir. Sonra da $f \subseteq A \times B$ altkümesi kesikli çizgiler içine alınmıştır. Bu gösterim, f fonksiyonunun "grafiği" olarak düşünülebilir. Daha doğal bir gösterim Şekil 12.3(b)'de verilmiştir. Bu gösterimde, A ve B kümeleri yan yana çizilerek a noktasından b noktasına çizilen bir ok ile $f(a) = b$ ifadesi temsil edilmişitr.



Şekil 12.3: $f = \{(p,0),(q,1),(r,2),(s,2)\}$ fonksiyonunun iki farklı gösterimi

Genel olarak analizde veya cebirde karşılaştığınız türde bir $f : A \to B$ fonksiyonu için en iyi görsel açıklamayı geleneksel anlamda çizilen grafik sunar. Fakat A ve B sonlu ya da keyfi seçilen kümeler ise f fonksiyonunu oklar ile tarif etmek, onu göstermenin çoğu zaman en uygun yoludur.

Tanım 12.1'e göre bir fonksiyonun gerçekten de özel bir küme olduğunu tekrar vurgulayalım. Her $f : A \to B$ fonksiyonu, $A \times B$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. Buna karşılık analiz ders kitapları, büyük olasılıkla, bir fonksiyonu belirli bir "kural" olarak tanımlar. Bu bakış açısı ilk birkaç dönemde verilen analiz dersleri için yeterli olsa da ileri seviye matematik çalışmak için yeterli değildir. Buradaki sorun "kural" kelimesinin belirsizlik içermesidir. Bir fonksiyonu küme olarak tanımlamak, bu belirsizliği ortadan kaldırır. Böylece fonksiyonlar somut birer matematiksel nesneye dönüşür.

Buna rağmen pratikteki eğilim, fonksiyonları kurallar olarak düşünme yönündedir. Örneğin $f(x) = |x| + 2$ formülü ile verilen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu, $(n, |n| + 2)$ formundaki sıralı ikililerin kümesi yerine, her $x \in \mathbb{Z}$ tamsayısını $|x| + 2 \in \mathbb{N}$ doğal sayısına gönderen bir kural olarak düşünürüz. Aslında (bu kitapta olduğu gibi) fonksiyonların teorik yapılarının anlaşılması veya yorumlanması gereken durumlarda Tanım 12.1 kullanışlıdır. Bu tanım, fonksiyonları basit bir şekilde düşünebilmek için gereken temeli oluşturur. Örneğin, reel sayılardan yine reel sayılara tanımlı tüm fonksiyonların kümesi gibi bir S kümesi üzerinde çalıştığımızı düşünelim. Tanım 12.1 olmadan S kümesinin elemanların ne tür nesler olduğu çok açık değildir. Fakat Tanım 12.1 bize elemanların ne olduğu konusunda bilgi verir: Her eleman, bir $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ altkümesidir. Sonuç olarak S kümesini bir "kurallar" topluluğu olarak düşünmekte özgürüz fakat daha detaylı bir inceleme gerektiren durumlarda Tanım 12.1'i kullanabiliriz.

Sıradaki örnek, notasyonla ilgili bir noktayı işaret eder. Tanım kümesi bir kartezyen çarpım olan $f:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon, bir $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ sıralı ikilisini girdi olarak alır ve onu $f((m,n)) \in \mathbb{Z}^2$ elemanına gönderir. Notasyonu basitleştirmek için, $f(x)$ yerine fx yazmaya benzese de, $f((m,n))$ yerine $f(m,n)$ yazılır. Ayrıca, fonksiyonları göstermek için şu ana kadar f, g ve h harflerini kullanmış olsak da başka makul sembollerin kullanılabileceğini belirtmek gerekir. Örneğin Yunan alfabesinin φ ve θ gibi harfleri oldukça yaygın olarak kullanılır.

Örnek 12.3 Bir $\varphi:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\varphi(m,n) = 6m-9n$ ile tanımlansın. Bu fonksiyon, bir küme olarak $\varphi = \{((m,n),6m-9n) : (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$ biçiminde yazılabilir. Buna göre φ fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Dikkat edilirse herhangi bir $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ için $\varphi(m,n) = 6m-9n = 3(2m-3n)$ değeri 3'ün bir katıdır. O hâlde görüntü kümesindeki her sayı 3'ün bir katıdır. Böylece görüntü kümesi, 3'ün bütün katlarının kümesinin bir *altkümesidir*. Diğer taraftan $b = 3k$ sayısı 3'ün bir katı ise $\varphi(-k,-k) = 6(-k)-9(k) = 3k = b$ olur. Buna göre 3'ün bütün katları φ fonksiyonunun görüntü kümesindedir. Bu nedenle φ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ olmalıdır.

Bu bölümü, $f:A \to B$ ve $g:C \to D$ fonksiyonlarının eşitliğinden bahsederek bitirelim. Tanım 12.1'e göre f ve g fonksiyonları, $f \subseteq A \times B$ ve $g \subseteq C \times D$ altkümeleridir. Eğer f ve g kümeleri eşit ise f ve g fonksiyonlarının da eşit olacağını söylemek gayet mantıklıdır.

O hâlde $f = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ ve $g = \{(3,b),(2,a),(1,a)\}$ fonksiyonları eşittir çünkü f ve g kümeleri aynıdır. Bu iki fonksiyonun tanım kümesi, yani $(x,y) \in f = g$ sıralı ikililerindeki ilk x bileşenlerinin kümesi, $A = \{1,2,3\}$ kümesidir. Eşit fonksiyonların tanım kümeleri aynı olmak zorundadır.

Sonuç olarak $f = g$ ifadesi, her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olması anlamına gelir. Bu kavramları aşağıdaki tanım ile toparlayalım.

Tanım 12.3 Herhangi iki $f:A \to B$ ve $g:A \to D$ fonksiyonunun **eşit** olması için gerek ve yeter şart her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olmasıdır.

Dikkat edileceği üzere değer kümeleri farklı olan iki fonksiyon eşit olabilir. Örneğin $f(x) = |x|+2$ ve $g(x) = |x|+2$ biçiminde tanımlı $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ve $g:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonların değer kümeleri farklıdır. Ancak tanım kümelerindeki her x için $f(x) = g(x)$ olduğundan bu iki fonksiyon eşittir. Eşit fonksiyonların farklı değer kümelerine sahip olması sizi rahatsız ettiyse 225. sayfadaki gözlemi hatırlayın. Değer kümesi, bir fonksiyonun kendine özgü bir özellik olmaktan ziyade biraz tercih meselesidir. (Görüntü kümesini içeren her küme, bir değer kümesi olabilir.)

Bölüm 12.1 Alıştırmaları

1. $A = \{0,1,2,3,4\}$ ve $B = \{2,3,4,5\}$ ise $f = \{(0,3),(1,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz. Sonra da $f(2)$ ve $f(1)$ değerlerini bulunuz.

2. $A = \{a,b,c,d\}$ ve $B = \{2,3,4,5,6\}$ ise $f = \{(a,2),(b,3),(c,4),(d,5)\}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz. Sonra da $f(b)$ ve $f(d)$ değerlerini bulunuz.

3. Birbirinden farklı dört tane $f : \{a,b\} \to \{0,1\}$ fonksiyonu vardır. Bunların hepsini listeleyiniz. Bu işi diyagram kullanarak yapabilirsiniz.

4. Birbirinden farklı sekiz tane $f : \{a,b,c\} \to \{0,1\}$ fonksiyonu vardır. Bunların hepsini listeleyiniz. Bu işi diyagramlar kullanarak yapabilirsiniz.

5. $A = \{a,b,c,d\}$ ve $B = \{d,e\}$ olsun. A'dan B'ye fonksiyon olmayan bir bağıntı yazınız.

6. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f = \{(x,4x+5) : x \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirtiniz. Sonra da $f(10)$ değerini bulunuz.

7. $f = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3x + y = 4\}$ kümesi $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

8. $f = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + 3y = 4\}$ kümesi $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

9. $f = \{(x^2,x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

10. $f = \{(x^3,x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

11. Kabul edelim ki $\theta = \{(X,|X|) : X \subseteq \mathbb{Z}_5\}$ olsun. Bu küme bir fonksiyon mudur? Eğer fonksiyon ise tanım ve görüntü kümeleri nedir?

12. Kabul edelim ki $\theta = \{((x,y),(3y,2x,x+y)) : x,y \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu küme bir fonksiyon mudur? Eğer fonksiyon ise tanım ve görüntü kümeleri nedir?

12.2 Birebir ve Örten Fonksiyonlar

Cebir ve analiz derslerinden hatırlayacağınız üzere fonksiyonlar *birebir* ve *örten* olabilir. Bu kavramlar, bir fonksiyonun tersinin olup olmadığını belirler. Şimdi bunlara bir göz atalım. İleri matematikte *birebir* yerine *injektif; örten* yerine de *surjektif* kelimeleri sıklıkla kullanılır.[1] İşte tanım:

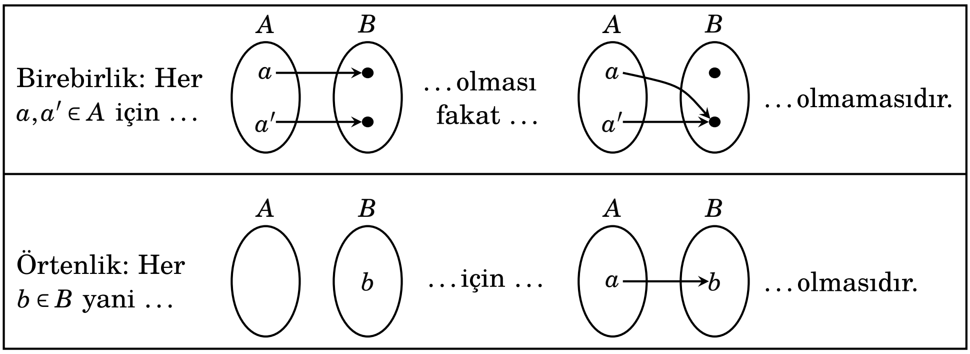
Tanım 12.4 Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin.

1. Her $a,a' \in A$ ve $a \neq a'$ için $f(a) \neq f(a')$ ise f **birebirdir** (veya injektiftir).
2. Her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ var ise f **örtendir** (veya surjektiftir).
3. Eğer f birebir ve örten ise bir **eşlemedir** (veya bijektiftir).

Tanım 12.4 aşağıda görsel olarak açıklanmıştır. İşin özü itibariyle birebirlik, A'nın eşit olmayan elemanlarının B'deki eşit olmayan elemanlara

[1] *İnjektif, surjektif* ve *bijektif* kelimeleri İngilizcede yaygın olsa da Türkçede pek tercih edilmez. Bu nedenle kitabın çevirisinde *birebir, örten* ve *eşleme* kelimeleri kullanılmıştır.

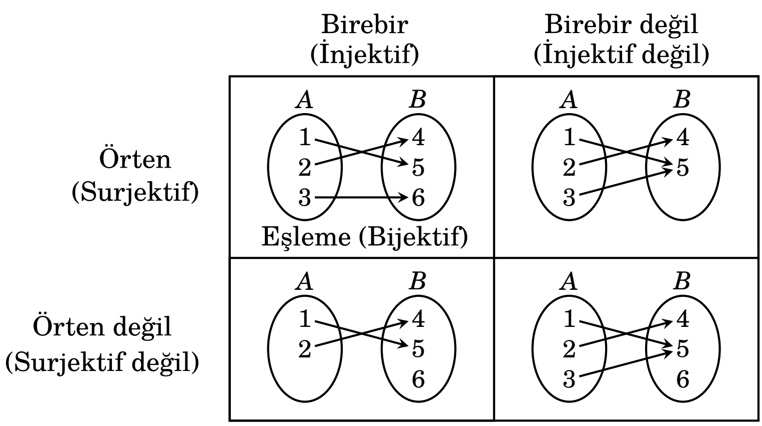
gitmesidir. Örtenlik ise B'deki her elemanı işaret eden bir ok olmasıdır. Bir başka deyişle, $a \in A$ olmak üzere, B'deki her eleman bir $f(a)$ değerine eşittir.



Daha somut örnekler için $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x^3$ ile tanımlı $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını ele alalım. Dikkat edilirse $-2 \neq 2$ fakat $f(-2) = f(2)$ olduğu için f birebir değildir. Ayrıca f örten de değildir çünkü $b = -1$ (veya herhangi bir negatif sayı) için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ yoktur. Öte yandan $g(x) = x^3$ fonksiyonu hem birebir hem de örtendir. Yani bir eşlemedir.

Bir fonksiyonun örten olup olmaması onun değer kümesine bağlıdır. Örneğin, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iken örten değildir ama $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ iken örtendir. Örten bir fonksiyondan bahsederken, aklımızda mutlaka belli bir değer kümesi olmalıdır.

Bir fonksiyonun sahip olabileceği dört olası birebir/örten kombinasyonu vardır. Bunlar, aşağıda verilen dört $A \to B$ fonksiyonu ile gösterilmiştir. İlk sütundaki fonksiyonlar birebirdir, ikinci sütundakiler birebir değildir. İlk satırdaki fonksiyonlar örtendir, ikinci satırdakiler örten değildir.



Hazır burdayken belirtelim: Tanımı gereği, bir fonksiyonun örten olması için gerek ve yeter şart değer kümesinin görüntü kümesine eşit olmasıdır.

Çoğu zaman, belli bir $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek gerekir. Böyle bir durumda, Tanım 12.4 gereğince, her $a, a' \in A$ için $(a \neq a') \Rightarrow \big(f(a) \neq f(a')\big)$ koşullu önermesinin doğru olduğunu ispatlamak gerekir. Bunun için kullanılan iki temel yaklaşım aşağıda özetlenmiştir.

Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir olduğu nasıl gösterilir:

Doğrudan Yaklaşım: Kabul edelim ki $a, a' \in A$ ve $a \neq a'$ olsun. $\vdots$ Bu nedenle $f(a) \neq f(a')$ olur.	**Dolaylı Yaklaşım:** Kabul edelim ki $a, a' \in A$ ve $f(a) = f(a')$ olsun. $\vdots$ Bu nedenle $a = a'$ olur.

Bu iki yaklaşım arasından, özellikle f fonksiyonu cebirsel bir formül ile tanımlanmış ise, dolaylı yaklaşımı kullanmak daha kolaydır. Bunun sebebi şudur: Dolaylı yaklaşım $f(a) = f(a')$ *eşitliği* ile başlar ve $a = a'$ *eşitliği* ile biter. Cebirden bilindiği üzere, eşitliklerle uğraşmak eşitsizliklerle uğraşmaktan genelde daha kolaydır.

Bir fonksiyonun birebir *olmadığını* göstermek için $(a \neq a') \Rightarrow \big(f(a) \neq f(a')\big)$ önermesi *çürütülmelidir*. Bunun için $a \neq a'$ fakat $f(a) = f(a')$ olacak şekilde iki $a, a' \in A$ bulmak yeterlidir.

Şimdi, $f : A \to B$ fonksiyonunun *örten* olduğunu nasıl göstereceğimize bakalım. Tanım 12.4'e göre $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$ önermesini ispatlamak gerekir. Bunu sözel olarak ifade edelim: Her $b \in B$ için $f(a) = b$ şartını sağlayan (b elemanına bağlı olabilecek) en az bir $a \in A$ var olduğunu ispatlamak gerekir. Bunun ana hatları şu şekildedir.

Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun örten olduğu nasıl gösterilir:

Kabul edelim ki $b \in B$ olsun. [$f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ var olduğu gösterilir.]

İkinci adımda, $f(a) = b$ koşulunu sağlayan bir a elemanı olduğunu kanıtlamak gerekir. Bunun için bu şartı sağlayan sadece bir tane a örneği bulmak yeterlidir. (Böyle bir örneğin nasıl bulunacağı f fonksiyonunun tanımına bağlıdır. Eğer f bir formül olarak verilmiş ise $f(a) = b$ denklemini a için çözerek bu işi yapabiliriz. Bunu bazen de sadece düz mantıkla bulabiliriz.) Bir fonksiyonunun örten *olmadığını* göstermek için $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$ önermesinin olumsuzu yani $\exists b \in B, \forall a \in A, f(a) \neq b$ önermesi ispatlanmalıdır.

Aşağıdaki örnekler bu kavramları açıklar. (İlk örnekteki $\mathbb{R} - \{0\}$ kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinden 0 atılarak elde edilen kümeyi temsil eder.)

Örnek 12.4 Bir $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\frac{1}{x}+1$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olduğunu fakat örten olmadığını gösteriniz.

Birebirlik için dolaylı yaklaşımı kullanalım. Kabul edelim ki $a,a'\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve $f(a)=f(a')$ olsun. Buna göre $\frac{1}{a}+1=\frac{1}{a'}+1$ olur. Her iki taraftan 1 çıkarılır ve elde edilen ifade ters çevrilir ise $a=a'$ elde edilir. O hâlde f birebirdir.

Bu fonksiyon örten değildir çünkü her $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $f(x)=\frac{1}{x}+1\neq 1$ olacak şekilde görüntü kümesinde $b=1\in\mathbb{R}$ vardır.

Örnek 12.5 Bir $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ fonksiyonu $f(x)=\frac{1}{x}+1$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ve örten (yani bir eşleme) olduğunu gösteriniz.

Bu örnek, değer kümesi dışında öncekiyle aynıdır. Önceki örnekten f birebirdir. Örtenlik için keyfi bir $b\in\mathbb{R}-\{1\}$ seçelim. Buna göre $f(a)=b$ yani $\frac{1}{a}+1=b$ olacak şekilde bir $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ bulmak gerekir. Eğer $\frac{1}{a}+1=b$ eşitliği a için çözülürse $a=\frac{1}{b-1}$ bulunur. Bu sayı, $b\neq 1$ olduğu için tanımlıdır. Sonuç olarak, herhangi bir $b\in\mathbb{R}-\{1\}$ için $f\left(\frac{1}{b-1}\right)=b$ elde edilir. Yani f örtendir.

Örnek 12.6 Bir $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ fonksiyonu $g(m,n)=(m+n,m+2n)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

Birebirlik için dolaylı yaklaşımı kullanalım. Buna göre $g(m,n)=g(k,l)$ ise $(m,n)=(k,l)$ olduğunu göstermek gerekir. Kabul edelim ki $(m,n),(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ve $g(m,n)=g(k,l)$ olsun. O zaman $(m+n,m+2n)=(k+l,k+2l)$ olur. Buradan $m+n=k+l$ ve $m+2n=k+2l$ elde edilir. İkinci eşitlikten ilki çıkarılarak $n=l$ bulunur. Sonra da $m+n=k+l$ eşitliğinden $n=l$ çıkarılarak $m=k$ bulunur. Böylece $m=k$ ve $n=l$ yani $(m,n)=(k,l)$ elde edilir. Sonuç olarak g birebirdir.

Örtenlik için keyfi bir $(b,c)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ seçelim. Buna göre $g(x,y)=(b,c)$ olacak şekilde bir $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ bulmak gerekir. Dikkat edilirse $g(x,y)=(b,c)$ ifadesi $(x+y,x+2y)=(b,c)$ anlamına gelir. Buradan, aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & b \\ x & + & 2y & = & c. \end{array}$$

Bu sistem çözülerek $x=2b-c$ ve $y=c-b$ bulunur. Buradan $(x,y)=(2b-c,c-b)$ yazılabilir. Sonuç olarak $g(2b-c,c-b)=(b,c)$ olduğu için g örtendir.

Örnek 12.7 Bir $h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ fonksiyonu $h(m,n)=\dfrac{m}{|n|+1}$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını belirleyiniz.

Bu fonksiyon birebir *değildir* çünkü $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ kümesinin eşit olmayan $(1,2)$ ve $(1,-2)$ elemanları için $h(1,2)=h(1,-2)=\frac{1}{3}$ olur. Buna karşılık h örtendir. Bunu görmek için keyfi bir $b\in\mathbb{Q}$ seçelim. O zaman $b=\frac{c}{d}$ olacak şekilde $c,d\in\mathbb{Z}$ vardır. Gerektiğinde c tamsayısını negatif seçerek d tamsayısının pozitif olduğunu varsayabiliriz. Buna göre $h(c,d-1)=\frac{c}{|d-1|+1}=\frac{c}{d}=b$ olur.

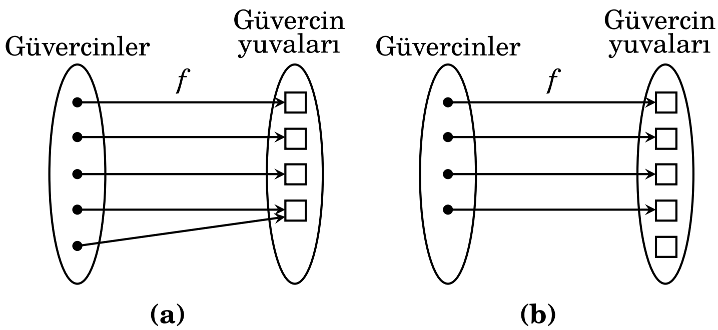
Bölüm 12.2 Alıştırmaları

1. $A = \{1,2,3,4\}$ ve $B = \{a,b,c\}$ olsun. Ne birebir ne de örten olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonu yazınız.
2. $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ doğal logaritma fonksiyonu birebir midir? Örten midir?
3. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kosinüs fonksiyonu birebir midir? Örten midir? Eğer $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ olarak tanımlansaydı ne olurdu?
4. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = (2n, n+3)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirleyiniz.
5. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = 2n+1$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirleyiniz.
6. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m,n) = 3n - 4m$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirleyiniz.
7. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m,n) = 2n - 4m$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirleyiniz.
8. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m,n) = (m+n, 2m+n)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirleyiniz.
9. $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ fonksiyonu bir eşlemedir. Gösteriniz.
10. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ fonksiyonu bir eşlemedir. Gösteriniz.
11. Bir $\theta : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\theta(a,b) = (-1)^a b$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.
12. Bir $\theta : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\theta(a,b) = a - 2ab + b$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.
13. Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x,y) = (xy, x^3)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.
14. Bir $\theta : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ fonksiyonu $\theta(X) = \overline{X}$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız
15. Bu soru $f : \{A,B,C,D,E,F,G\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?
16. Bu soru $f : \{A,B,C,D,E\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?
17. Bu soru $f : \{A,B,C,D,E,F,G\} \to \{1,2\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?
18. Bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$ kuralı ile tanımlansın. Bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu gösteriniz.

12.3 Yeniden Güvercin Yuvası İlkesi

Güvercin yuvası ilkesi adı verilen sonuçla ilk olarak Bölüm 3.9'da karşılaştık. Bu ilke, birebir ve örten fonksiyonlar dilinde de ifade edilebilir. Şimdi bundan bahsedelim. Burada ele alacağımız konular Ünite 3'teki içeriklerden bağımsızdır. Bu nedenle o üniteyi atladıysanız da önemli değildir.

Güvercin yuvası ilkesi basit bir fikirden esinlenir. Güvercinlerden oluşan bir A kümesi ve yuvalardan oluşan bir B kümesi verilsin. Tüm güvercinlerin uçarak yuvalarına girdiğini hayal edelim. Bu olayı, p isimli güvercinin $f(p)$ isimli yuvaya girdiğini belirten bir $f : A \to B$ fonksiyonu ile temsil edebiliriz. Bkz: Şekil 12.4.



Şekil 12.4: Güvercin yuvası ilkesi

Şekil 12.4(a)'daki güvercin sayısı yuva sayısından fazla olduğu için en az iki güvercin aynı yuvaya girmek zorunda kalır. Bu durum, f fonksiyonunun birebir olmaması anlamına gelir. Şekil 12.4(b)'deki güvercin sayısı yuva sayısından az olduğu için en az bir yuva boş kalır. Bu durum ise f fonksiyonunun örten olmaması anlamına gelir.

Yukarıda, şekillerle anlatılan fikrin güvercinlerle pek alakası yoktur ancak yine de *güvercin yuvası ilkesi* olarak adlandırılır:

Güvercin Yuvası İlkesi (fonksiyonlar için)
A ve B sonlu iki küme ve $f : A \to B$ herhangi bir fonksiyon olsun.

1. Eğer $|A| > |B|$ ise f birebir değildir.
2. Eğer $|A| < |B|$ ise f örten değildir.

Güvercin yuvası ilkesi oldukça basit olsa da o kadar basit olmayan bazı önermeleri ispatlamak için kullanılabilir. Buna iki tane örnek verelim.

Önerme 12.1 Bir A kümesi, 1 ile 100 arasındaki (1 ve 100 dahil) herhangi on tamsayıdan oluşsun. Bu durumda, elemanlarının toplamı eşit olacak şekilde birbirinden farklı $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq A$ altkümeleri vardır.

Bu önermeyi anlamak için 1'den 100'e kadar olan tamsayılar arasından rastgele seçilmiş on tamsayıdan oluşan

$$A = \{5, 7, 12, 11, 17, 50, 51, 80, 90, 100\}$$

kümesini göz önüne alalım. Dikkat edileceği üzere A kümesinin $X = \{5, 80\}$ ve $Y = \{7, 11, 17, 50\}$ altkümelerinin elemanları toplamı (85 tamsayısına) eşittir. Eğer 5 yerine 6 seçerek A kümesini biraz değiştirirsek

$$A = \{6, 7, 12, 11, 17, 50, 51, 80, 90, 100\}$$

olur. Bu sefer de $X = \{7, 12, 17, 50\}$ ve $Y = \{6, 80\}$ altkümelerinin elemanları toplamı (86 tamsayısına) eşittir. Önerme, A kümesi nasıl seçilirse seçilsin bunun her zaman doğru olduğunu söyler. İşte ispatı:

İspat. Kabul edelim ki $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, \dots, 99, 100\}$ ve $|A| = 10$ olsun. Eğer $X \subseteq A$ ise X kümesinin en fazla on elemanı olabilir. Bunların her biri 1 ile 100 arasındadır. O hâlde X altkümesinin elemanları toplamı $100 \cdot 10 = 1000$'den küçüktür. Şimdi, X altkümesindeki elemanların toplamını $f(X)$ ile gösteren

$$f : \mathscr{P}(A) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 1000\}$$

fonksiyonunu ele alalım. (Örnek: $f(\{3, 7, 50\}) = 60$; $f(\{1, 70, 80, 95\}) = 246$.) Dikkat edilirse $|\mathscr{P}(A)| = 2^{10} = 1024 > 1001 = \left|\{0, 1, 2, 3, \dots, 1000\}\right|$ olduğu için güvercin yuvası ilkesi gereğince f birebir değildir. Bu nedenle $f(X) = f(Y)$ olacak şekilde birbirinden farklı $X, Y \in \mathscr{P}(A)$ vardır. Bir başka deyişle, elemanları toplamı birbirine eşit olan $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq A$ vardır. ■

Önerme 12.2 Kafalarında eşit sayıda saç teli olan en az iki Teksaslı vardır.

İspat. Burada iki farklı bilgi kullanmak gerekir. Birincisi, Teksas'ın nüfusu yirmi milyondan fazladır. İkincisi, biyolojik bir gerçek olarak her insanın kafasındaki saç teli sayısı bir milyondan azdır. Şimdi, tüm Teksaslıların kümesi A olsun. $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 1000000\}$ olmak üzere bir x şahsının kafasındaki saç teli sayısını $f(x)$ ile gösteren $f : A \to B$ fonksiyonu tanımlayalım. $|A| > |B|$ olduğu için güvercin yuvası ilkesi gereğince f birebir değildir. Bu nedenle $f(x) = f(y)$ olacak şekilde x ve y şahısları vardır. Bir başka deyişle, bu Teksaslıların kafalarındaki saç teli sayısı aynıdır. ■

Güvercin yuvası ilkesini kullanan ispatlar, Bölüm 7.4'de bahsedilen manada, yapısal olmama eğilimindedir. Örneğin yukarıdaki ispat, kafalarında aynı miktarda saç teli olan iki Teksaslıyı açıkça vermez. Bunun yerine, böyle iki kişinin var olduğunu gösterir. Eğer yapısal bir ispat yapılmak istenirse iki tane kel Teksaslı bulmak yeter. Çünkü bunların aynı sayıda yani sıfır tane saç teli vardır.

Bölüm 12.3 Alıştırmaları

1. Altı tane tamsayı rastgele seçilsin. Bunlardan en az ikisinin 5 ile bölümlerinden kalan sayıların aynı olduğunu ispatlayınız.

2. Eğer a bir doğal sayı ise $a^k - a^l$ ifadesi 10 ile bölünecek şekilde k ve l doğal sayıların var olduğunu ispatlayınız.

3. Altı tane doğal sayı rastgele seçilsin. Bunlardan ikisinin toplamının veya farkının 9 ile bölünebileceğini ispatlayınız.

4. Kenar uzunlukları birer birim olan bir karenin içinden rastgele beş tane nokta seçilsin. Bu noktalardan en az ikisinin birbirlerine en fazla $\frac{\sqrt{2}}{2}$ birim uzaklıkta olduklarını ispatlayınız.

5. Birbirinden farklı yedi tane doğal sayıdan oluşan bir kümede, toplamları veya farkları 10 ile bölünen iki tane tamsayının olduğunu ispatlayınız.

6. *Büyük daire*, bir S küresinin kendi merkezinden geçen düzlem ile kesişimidir. Her büyük daire, S küresini iki parçaya ayırır. Bu parçalardan biriyle büyük dairenin birleşimi bir *yarım küredir.* Eğer S küresi içine beş nokta rastgele yerleştirilirse bunlardan dördünü içeren bir yarım kürenin var olduğunu ispatlayın.

7. İspatlayın ya da çürütün: $|X| > n$ olmak üzere her $X \subseteq \{1,2,3,\ldots,2n\}$ altkümesi $a \mid b$ veya $b \mid a$ olacak şekilde birbirinden farklı a ve b elemanları içerir.

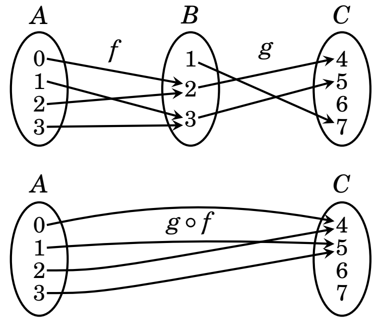
12.4 Bileşke

Fonksiyonlardaki bileşke kavramını cebir ve analiz derslerinden bilirsiniz. Yine de bu konu kapsamlı bir şekilde tekrar gözden geçirilmeye değer.

Tanım 12.5 Kabul edelim ki $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ iki fonksiyon olsun. (Burada f fonksiyonun değer kümesi, g fonksiyonunun tanım kümesine eşittir.) Buna göre f fonksiyonunun g ile **bileşkesi**, $g \circ f$ gösterilen ve her $x \in A$ için $g \circ f(x) = g(f(x))$ kuralı ile tanımlanan başka bir fonksiyondur. Böylece $g \circ f$ fonksiyonu A'nın elemanlarını C'ye götürür. Yani $g \circ f : A \to C$.

Aşağıdaki şekil, bu tanımı açıklamaktadır. Burada $f : A \to B$, $g : B \to C$ ve $g \circ f : A \to C$ olarak verilmiştir. Örneğin, $g \circ f(0) = g(f(0)) = g(2) = 4$ olur.

Sembollerin sırasına çok dikkat edilmelidir çünkü $g \circ f$ ifadesinde ilk önce g gelse de $g \circ f(x)$ bileşkesi $g(f(x))$ kuralı ile bulunur. Daha açık bir ifadeyle, x değerine ilk önce f uygulanır ve sonra da $f(x)$ değerine g uygulanır.



Şekil 12.5: İki fonksiyonun bileşkesi

Dikkat edilirse f fonksiyonunun görüntü kümesi, g fonksiyonunun tanım kümesinin bir *altkümesi* olduğu zaman da $g \circ f$ anlamlıdır. Bu gözlemi akılda tutmalısınız. Ancak konuyu basit tutmak için, biz sadece ilgili tanım ve görüntü kümelerinin eşit oldukları durumlarla ilgileneceğiz.

Örnek 12.8 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları $f = \{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$ ve $g = \{(0, 3), (1, 1)\}$ biçiminde tanımlansın. Buna göre $g \circ f = \{(a, 3), (b, 1), (c, 3)\}$ olur.

Örnek 12.9 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $f : A \to B$ ve $g : C \to B$ fonksiyonları $f = \{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$ ve $g = \{(1, 0), (2, 1), (3, 1)\}$ ile verilsin. Bu durumda $g \circ f$ tanımlı değildir çünkü f fonksiyonunun değer kümesi B ile g fonksiyonunun tanım kümesi C aynı değildir. Hatırlayın: $g \circ f$ ifadesinin anlamlı olabilmesi için f fonksiyonunun değer kümesi, g fonksiyonun tanım kümesine eşit (ya da en azından altkümesi) olmalıdır.

Örnek 12.10 Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = x^2 + x$ ve $g(x) = x + 1$ biçiminde tanımlanmış olsun. Buna göre $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = x^2 + x + 1$ kuralı ile verilir.

Aslında, f ile g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri eşit olduğu için onların sırasını değiştirip bileşkelerini alabiliriz. Buna göre $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) = x^2 + 3x + 2$ ile verilir

Bu örnek, ikisi birden tanımlı olsa da, $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarının eşit olmak zorunda olmadığını gösterir. Bu gözlem, *fonksiyonlardaki bileşke işlemi değişmeli değildir* diye ifade edilir.

Bu bölümü, gelecekteki matematik çalışmalarınızda karşınıza çıkabilecek birkaç gözlemi ispatlayarak bitirelim. Bunlardan ilki, değişmeli olmasa da, fonksiyon bileşkesinin birleşme özelliğine *sahip* olmasıdır.

Teorem 12.1 Eğer $f: A \to B$, $g: B \to C$ ve $h: C \to D$ ise $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ olur. Bir başka deyişle, fonksiyonların bileşkesi birleşme özelliğine sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki f, g ve h belirtildikleri gibi olsun. Tanım 12.5 gereğince $(h \circ g) \circ f$ ve $h \circ (g \circ f)$ ifadeleri, A kümesinden D kümesine birer fonksiyondur. Bunların eşit olduğunu göstermek için

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

denklemi her $x \in A$ için doğrulanmalıdır. Tanım 12.5'e göre

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\big(g(f(x))\big)$$

ve

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big(g \circ f(x)\big) = h\big(g(f(x))\big)$$

olur. Her iki denklemin sağ tarafı $h\big(g(f(x))\big)$ ifadesine eşittir. Sonuç olarak

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

elde edelir. ■

Teorem 12.2 Kabul edelim ki $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ olsun. Eğer f ve g birebir ise $g \circ f$ birebirdir. Eğer f ve g örten ise $g \circ f$ örtendir.

İspat. İlk önce f ve g birebir olsun. Bileşke fonksiyonun birebir olduğunu görmek için $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ olduğunda $x = y$ olduğunu göstermek gerekir. Kabul edelim ki $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ olsun. Bu, $g(f(x)) = g(f(y))$ anlamına gelir. Buradan $f(x) = f(y)$ bulunur. (Aksi halde g birebir olamaz.) Üstelik, f birebir ve $f(x) = f(y)$ olduğu için $x = y$ olmalıdır. Böylelikle $g \circ f$ birebirdir.

Şimdi, f ve g örten olsun. Bileşke fonksiyonun örten olduğunu görmek için C kümesindeki her c elemanına karşılık $gof(a) = c$ olacak şekilde bir $a \in A$ var olduğunu göstermek gerekir. Bunun için rastgele bir $c \in C$ seçelim. Dikkat edilirse g örten olduğu için $g(b) = c$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Aynı zamanda f örten olduğu için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan $g(f(a)) = g(b) = c$ veya $g \circ f(a) = c$ yazılabilir. Böylelikle $g \circ f$ örtendir. ■

Bölüm 12.4 Alıştırmaları

1. $A = \{5,6,8\}, B = \{0,1\}$ ve $C = \{1,2,3\}$ olsun. Eğer $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları $f = \{(5,1),(6,0),(8,1)\}$ ve $g = \{(0,1),(1,1)\}$ ile tanımlı ise $g \circ f$ nedir?
2. $A=\{1,2,3,4\}, B=\{0,1,2\}$ ve $C=\{1,2,3\}$ olsun. Eğer $f:A \to B$ ve $g:B \to C$ fonksiyonları $f = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,0)\}$ ve $g = \{(0,1),(1,1),(2,3)\}$ ile tanımı ise $g \circ f$ nedir?
3. $A = \{1,2,3\}$ olmak üzere $f = \{(1,2),(2,2),(3,1)\}$ ve $g = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ ile tanımlı $f, g : A \to A$ fonksiyonları verilsin. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
4. $A = \{a,b,c\}$ olmak üzere $f = \{(a,c),(b,c),(c,c)\}$ ve $g = \{(a,a),(b,b),(c,a)\}$ ile tanımlı $f, g : A \to A$ fonksiyonları verilsin. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
5. Eğer $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ve $g(x) = x^3$ biçiminde tanımlı ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
6. Eğer $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ve $g(x) = 3x+2$ biçiminde tanımlı ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
7. Eğer $f, g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonları $f(m,n) = (mn, m^2)$ ve $g(m,n) = (m+1, m+n)$ biçiminde tanımlı ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
8. Eğer $f, g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonları $f(m,n) = (3m-4n, 2m+n)$ ve $g(m,n) = (5m+n, m)$ biçiminde tanımlı ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
9. Eğer $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ve $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonları $f(m,n) = m+n$ ve $g(m) = (m,m)$ olarak tanımlı ise $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.
10. Eğer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x,y) = (xy, x^3)$ biçiminde tanımlı ise $f \circ f$ nedir?

12.5 Ters Fonksiyonlar

Analizden hatırlanacağı üzere bir f fonksiyonu birebir ve örten ise f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Ters fonksiyon; f fonksiyonun tanım kümesinin her x elemanındaki değerini, $f^{-1}(f(x)) = x$ ile "eski haline" dönüştürür. (Örneğin, $f(x) = x^3$ ise $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ olur.) Şimdi bu kavramı bir gözden geçirelim. Bunun için aşağıdaki tanımlarda verilen iki içeriği kullanacağız.

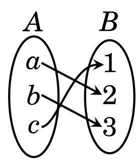
Tanım 12.6 Bir A kümesi verilsin. Her $x \in A$ için $i_A(x) = x$ kuralı ile tanımlı $i_A : A \to A$ fonksiyonuna A üzerinde **özdeşlik fonksiyonu** denir.

Örneğin, $A = \{1,2,3\}$ kümesi için $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ olur. Benzer şekilde $i_{\mathbb{Z}} = \{(n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$ ile verilir. Bir küme üzerindeki özdeşlik fonksiyonu, o kümenin her elemanını yine kendisine gönderen fonksiyondur.

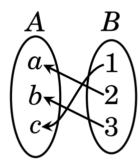
Herhangi bir A kümesi üzerinde tanımlı i_A özdeşlik fonksiyonu bir eşlemedir: Bu fonksiyon birebirdir çünkü $i_A(x) = i_A(y)$ ifadesi hemen $x = y$ ifadesine dönüşür. Bu fonksiyon örtendir çünkü değer kümesinden seçilen herhangi bir b elemanı aynı zamanda tanım kümesindedir ve $i_b(b) = b$ olur.

Tanım 12.7 A kümesinden B kümesine bir R bağıntısı verilsin. Bu **bağıntının tersi**, B kümesinden A kümesine tanımlı $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$ bağıntısıdır. Bir başka deyişle, R bağıntısına ait tüm sıralı ikililerin bileşenlerinin sırası değiştirilerek elde edilen bağıntı R'nin tersidir.

Örneğin $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{1,2,3\}$ olmak üzere $f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$ kümesi A'dan B'ye bir bağıntıdır. Buna göre $f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$ kümesi de B'den A'ya bir bağıntıdır. Üstelik f bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyondur ve f^{-1} bağıntısı B'den A'ya bir fonksiyondur. Bunların grafikleri aşağıda verilmiştir. Dikkat edilirse f^{-1} bağıntısının grafiği, f bağıntısının grafiğindeki oklar tersine çevirilerek elde edilir.

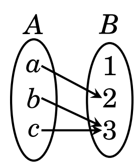


$f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$

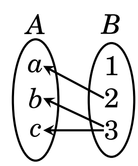


$f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$

Yukarıdaki iki küme üzerinde bir örnek daha verelim: A'dan B'ye tanımlı $g = \{(a,2),(b,3),(c,3)\}$ bağıntısını ele alalım. Buna göre $g^{-1} = \{(2,a),(3,b),(3,c)\}$ kümesi B'den A'ya bir bağıntıdır. Bunların grafikleri aşağıda verilmiştir.



$g = \{(a,2),(b,3),(c,3)\}$



$g^{-1} = \{(2,a),(3,b),(3,c)\}$

Bu sefer, g bir fonksiyondur ama g^{-1} bir fonksiyon değildir çünkü 3 tamsayısı g^{-1} kümesindeki iki tane farklı sıralı ikilinin ilk bileşenidir.

Yukarıdaki örneklerde verilen f ve g bağıntıları birer fonksiyondur. Buna karşılık f^{-1} bir fonksiyondur fakat g^{-1} değildir. Burada şu soru akla gelir: f bağıntısında olup g bağıntısında olmayan hangi özellik f^{-1} kümesini bir fonksiyon yapar fakat g^{-1} kümesinin bir fonksiyon olmasına engel olur. Cevap çok zor değildir. Dikkat edilirse $g(b) = g(c) = 3$ olduğu için g birebir değildir. Burada $(b,3),(c,3) \in g$ olması g^{-1} için problem teşkil eder çünkü $(3,b),(3,c) \in g^{-1}$ olduğu için g^{-1} bir fonksiyon olamaz. Sonuç olarak g^{-1} bağıntısının bir fonksiyon olabilmesi için g mutlaka birebir olmalıdır.

Fakat bu tek başına yeterli değildir. Dikkat edilirse g örten de değildir çünkü A'nın hiçbir eleman B'deki 1 elemanına gitmez. Yani g^{-1} bağıntısında ilk bileşeni 1 olan bir sıralı ikili yoktur. O hâlde g^{-1} bağıntısı B'den A'ya bir fonksiyon olamaz. Eğer g^{-1} bir fonksiyon ise g mutlaka örten olmalıdır.

Eğer g bir fonksiyonken g^{-1} ters bağıntısı da bir fonksiyon ise önceki iki paragraf g fonksiyonunun birebir ve örten (yani bir eşleme) olması gerektiğini ileri sürer. Bunu doğrulamak kolaydır. Karşıt olarak, eğer bir fonksiyon birebir ve örten (yani bir eşleme) ise onun ters bağıntısının bir fonksiyon olduğu kolaylıkla görülebilir. Bunu bir teorem ile özetleyelim.

Teorem 12.3 Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. Buna göre, f bir eşlemedir ancak ve ancak f^{-1} ters bağıntısı B'den A'ya bir fonksiyondur.

Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir eşleme olsun. Bu teoreme göre f^{-1} bir fonksiyondur. Her $x \in A$ için f bağıntısı $(x, f(x))$ formundaki tüm sıralı ikilileri içerdiğinden, f^{-1} bağıntısı da $(f(x), x)$ formundaki tüm sıralı ikilileri içerir. Dikkat edilirse $(f(x), x) \in f^{-1}$ olması $f^{-1}(f(x)) = x$ anlamına gelir. O hâlde her $x \in A$ için $f^{-1} \circ f(x) = x$ olur. Buradan $f^{-1} \circ f = i_A$ bulunur. Benzer şekilde $f \circ f^{-1} = i_B$ olduğu görülebilir. Bu bizi aşağıdaki tanıma yönlendirir.

Tanım 12.8 Bir $f : A \to B$ eşlemesinin **tersi**, $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonudur. Üstelik f ve f^{-1} fonksiyonları $f^{-1} \circ f = i_A$ ve $f \circ f^{-1} = i_B$ koşullarını sağlar.

Cebir ve analiz derslerinden hatırlayacağınız üzere, bir f eşlemesinin tersini yani f^{-1} fonksiyonunu bulmak için şöyle bir yöntem kullanılır: $y = f(x)$ denklemiyle başlanır ve değişkenlerin yerleri değiştirilip $x = f(y)$ yazılır. Bu denklem (eğer mümkün ise) y için çözülerek $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonu bulunur. Şimdi buna iki tane örnek verelim.

Örnek 12.11 Dikkat edilirse $f(x) = x^3 + 1$ olarak tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bu fonksiyonun tersini bulunuz.

İlk önce $y = x^3 + 1$ yazalım. Eğer değişkenlerin yerlerini değiştirirsek $x = y^3 + 1$ elde ederiz. Bu denklemi y için çözerek $y = \sqrt[3]{x-1}$ buluruz. Böylece

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

olur. (Bulduğumuz sonucu şu şekilde kontrol edebiliriz:

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)-1} = \sqrt[3]{x^3+1-1} = x.$$

O hâlde $f^{-1}(f(x)) = x$ olur. Bu noktada, x değerinden farklı elde edilen her sonuç yapılan yanlışa işaret eder.)

Örnek 12.12 Örnek 12.6, $g(m,n) = (m+n, m+2n)$ ile tanımlı $g : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu gösterir. Bunun tersini bulunuz.

Yukarıdaki yöntemi kullanılabiliriz. Ama $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ kümesinin elemanlarına dikkat etmemiz gerekir. Şimdi, $(x,y) = g(m,n)$ ile başlar ve (x,y) ile (m,n) değişkenlerinin yerlerini değiştirirsek $(m,n) = g(x,y)$ yazabiliriz. Bu ifade

$$(m,n) = (x+y, x+2y)$$

anlamına gelir. Buradan, aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & m \\ x & + & 2y & = & n\,. \end{array}$$

Bu denklem sistemi çözerek $x = 2m - n$ ve $y = n - m$ buluruz. Buna göre $(x,y) = (2m-n, n-m)$ ve böylece $\boxed{g^{-1}(m,n) = (2m-n, n-m)}$ elde ederiz.

Bu sonucu, $g^{-1}(g(m,n)) = (m,n)$ olduğunu göstererek kontrol edebiliriz:

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(m,n)) &= g^{-1}(m+n, m+2n) \\ &= \big(2(m+n)-(m+2n), (m+2n)-(m+n)\big) \\ &= (m,n)\,. \end{aligned}$$

Bölüm 12.5 Alıştırmaları

1. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = 6 - n$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu gösteriniz. Daha sonra f^{-1} fonksiyonunu bulunuz.

2. Bölüm 12.2'nin 9. alıştırmasında $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$ olarak tanımlı $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu ispatladınız. Şimdi bunun tersini bulunuz.

3. $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$ olmak üzere $f(n) = 2^n$ ile tanımlı $f : \mathbb{Z} \to B$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini bulunuz.

4. $f(x) = e^{x^3+1}$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eşlemesinin tersini bulunuz.

5. $f(x) = \pi x - e$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eşlemesinin tersini bulunuz.

6. $f(m,n) = (5m+4n, 4m+3n)$ ile tanımlı $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ eşlemesinin tersini bulunuz.

7. Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x,y) = ((x^2+1)y, x^3)$ kuralı ile tanımlansın. Bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini bulunuz.

8. $\theta(X) = \overline{X}$ ile tanımlı $\theta : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ bir eşleme midir? Eğer öyle ise tersi nedir?

9. Bir $f : \mathbb{R}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x,y) = (y, 3xy)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini bulunuz.

10. Bölüm 12.2'nin 18. alıştırmasına göre $f(n) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bunun tersini bulunuz.

12.6 Görüntü ve Ters Görüntü

Gelecekteki matematik derslerinde karşılaşacağınız bir notasyondan bahsetme vakti geldi. Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $X \subseteq A$ ise $f(X)$ ifadesi özel bir anlam taşır: $\{f(x) : x \in X\}$ kümesini temsil eder. Benzer şekilde, $Y \subseteq B$ ise *f fonksiyonunun tersi olmasa bile* $f^{-1}(Y)$ ifadesi $\{x \in A : f(x) \in Y\}$ kümesini temsil eder. Bu kümeler şöyle tanımlanır:

Tanım 12.9 Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon, $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq B$ olsun.

1. X kümesinin **görüntüsü** $f(X) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ kümesidir.
2. Y kümesinin **ters görüntüsü** $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \subseteq A$ kümesidir.

Kelimelerle ifade edelim: X'in f altındaki görüntüsü, f ile X'ten B içine gönderilen tüm elemanların kümesidir. (Kabaca, $f(X)$ kümesi X'in B içindeki biçimsiz bir "kopyası" olarak düşünülebilir.) Y'nin ters görüntüsü olan $f^{-1}(Y)$ de f ile A'dan Y içine gönderilen tüm elemanların kümesidir.

Lineer cebirde, iki vektör uzayı arasındaki bir $T : V \to W$ lineer dönüşümünü incelerken bu kavramlara rastlamışsınızdır. Eğer $X \subseteq V$ kümesi V'nin bir alt uzayı ise $T(X)$ görüntü kümesi de W'nun bir alt uzayıdır. Eğer $Y \subseteq W$ kümesi W'nun bir alt uzayı ise $T^{-1}(Y)$ ters görüntü kümesi de V'nin bir alt uzayıdır. (Eğer tanıdık gelmediyse bunu görmezden gelebilirsiniz.)

Örnek 12.13 Bir $f : \{s,t,u,v,w,x,y,z\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ fonksiyonu $f = \{(s,4),(t,8),(u,8),(v,1),(w,2),(x,4),(y,6),(z,4)\}$ ile tanımlansın. Bir eşleme olmadığı için f fonksiyonunun tersi yoktur. Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz:

1. $f(\{s,t,u,z\}) = \{8,4\}$
2. $f(\{s,x,z\}) = \{4\}$
3. $f(\{s,v,w,y\}) = \{1,2,4,6\}$
4. $f(\emptyset) = \emptyset$
5. $f^{-1}(\{4\}) = \{s,x,z\}$
6. $f^{-1}(\{4,9\}) = \{s,x,z\}$
7. $f^{-1}(\{9\}) = \emptyset$
8. $f^{-1}(\{1,4,8\}) = \{s,t,u,v,x,z\}$

Tanım 12.9'da kullanılan X ve Y sembolleri A ve B'nin birer altkümesini temsil eder (elemanı değil!). Bunun farkında olmak önemlidir. Örneğin, yukarıda $f^{-1}(\{4\}) = \{s,x,z\}$ yazılmıştır. Buna karşın $f^{-1}(4)$ ifadesi anlamsızdır çünkü f^{-1} fonksiyonu tanımsızdır. Benzer şekilde $f(\{s\}) = \{4\}$ ve $f(s) = 4$ ifadeleri arasında ince bir fark vardır. Buna dikkat edilmelidir.

Örnek 12.14 Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ ile tanımlansın. Dikkat edilirse $f(\{0,1,2\}) = \{0,1,4\}$ ve $f^{-1}(\{0,1,4\}) = \{-2,-1,0,1,2\}$ olur. Bu örnek, genel olarak $f^{-1}(f(X)) \neq X$ olduğunu gösterir.

Aynı f fonksiyonu için $f([-2,3]) = [0,9]$ ve $f^{-1}([0,9]) = [-3,3]$ olduğu görülebilir. Ayrıca $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$ ve $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$ olur. Aralıkların görüntüleri ve ters görüntüleri hakkındaki bu örnekleri anladığınızdan emin olunuz.

Matematik çalışmaya devam ettikçe, aşağıdaki sonuçlarla karşılaşmanız muhtemeldir. Şimdilik, alıştırmalar kısmında onları ispatlamak yeterlidir.

Teorem 12.4 Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. Eğer $W, X \subseteq A$ ve $Y, Z \subseteq B$ ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

1. $f(W \cap X) \subseteq f(W) \cap f(X)$
2. $f(W \cup X) = f(W) \cup f(X)$
3. $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$
4. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$
5. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$
6. $f\big(f^{-1}(Y)\big) \subseteq Y$.

Bölüm 12.6 Alıştırmaları

1. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f = x^2 + 3$ kuralı ile tanımlansın. Buna göre $f([-3,5])$ ve $f^{-1}([12,19])$ kümelerini bulunuz.

2. Aşağıda, bir $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ fonksiyonu tanımlanmıştır:

$$f = \big\{(1,3), (2,8), (3,3), (4,1), (5,2), (6,4), (7,6)\big\}.$$

Buna göre $f\big(\{1,2,3\}\big)$, $f\big(\{4,5,6,7\}\big)$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}\big(\{0,5,9\}\big)$ ve $f^{-1}\big(\{0,3,5,9\}\big)$ nedir?

3. Bu problem $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0,1,2,3,4\}$ olarak tanımlanabilecek fonksiyonlarla ilgilidir. Bu fonksiyonlardan kaç tanesi $\left|f^{-1}\big(\{3\}\big)\right| = 3$ özelliğine sahiptir?

4. Bu problem $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ olarak tanımlanabilecek fonksiyonlarla ilgilidir. Bu fonksiyonlardan kaç tanesi $\left|f^{-1}\big(\{2\}\big)\right| = 4$ özelliğine sahiptir?

5. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. Eğer $X \subseteq A$ ise, Örnek 12.14'e göre, genel olarak $f^{-1}\big(f(X)\big) \neq X$ olur. Ama $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$ ifadesi daima doğrudur. Bunu ispatlayınız.

6. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ile $Y \subseteq B$ altkümesi verilsin. Buna göre $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$ ifadesi daima doğru mudur? Bunu ya ispatlayınız ya da aksine bir örnek veriniz.

7. $f : A \to B$ bir fonksiyon ve $W, X \subseteq A$ ise $f(W \cap X) \subseteq f(W) \cap f(X)$ olduğunu gösteriniz.

8. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve $W, X \subseteq A$ altkümeleri verilsin. Genel olarak $f(W \cap X) = f(W) \cap f(X)$ ifadesi *yanlıştır.* Bunun için aksine bir örnek veriniz.

9. $f : A \to B$ bir fonksiyon ve $W, X \subseteq A$ ise $f(W \cup X) = f(W) \cup f(X)$ olduğunu gösteriniz.

10. $f : A \to B$ ve $Y, Z \subseteq B$ ise $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$ olduğunu ispatlayınız.

11. $f : A \to B$ ve $Y, Z \subseteq B$ ise $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$ olduğunu ispatlayınız.

12. Bir $f : A \to B$ fonksiyonunu ele alalım. İlk önce "f birebirdir ancak ve ancak her $X \subseteq A$ için $X = f^{-1}\big(f(X)\big)$" önermesini ispatlayınız. Daha sonra "f örtendir ancak ve ancak her $Y \subseteq B$ için $f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$" önermesini ispatlayınız.

13. $f : A \to B$ ve $X \subseteq A$ olsun. İspatlayın ya da çürütün: $f\big(f^{-1}(f(X))\big) = f(X)$.

14. $f : A \to B$ ve $Y \subseteq B$ olsun. İspatlayın ya da çürütün: $f^{-1}\big(f(f^{-1}(Y))\big) = f(Y)$.

ÜNİTE 13

Analizdeki İspatlar

Bu kitapta şu ana kadar ele aldığımız ispatlar çoğunlukla tamsayılar veya onlar ile ilgili yapılar (bölünebilme, n modülüne göre denklik, tamsayı kümeleri, tamsayılar arasındaki ilişkiler, tamsayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar vb.) hakkındadır.

Matematik sadece tamsayılardan ibaret değildir. Analiz, reel sayılar sistemi üzerine kurulmuştur. Bu nedenle analizdeki temel tanımlar için $\mathbb{R}$ kümesine ihtiyaç duyulur. Bunun bir sonucu olarak analizdeki (tanımları kullanan) ispatlar, matematiğin diğer alanlarındaki ispatlardan farklı bir niteliğe sahiptir. Analizdeki ispatları okurken ve yazarken, bildiğimiz ispat yöntemleri (doğrudan, dolaylı ve olmayana ergi) geçerlidir. Ancak düşünce yapınızı reel sayıların özelliklerine göre ayarlamak biraz zaman alabilir. Bu geçişi kolaylaştırmayı amaçlayan bu ünite ayrıca ileri analiz derslerinde karşılaşacağınız bazı kavramlara bir giriş niteliği taşır. Kitabın geri kalan kısmından bağımsız olduğu için bu üniteyi atlamak, devamlılığı bozmaz.

Tek değişkenli analiz, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu veya daha genel olarak $X\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ile ilgilenir. Genel olarak X tanım kümesi ya bir aralıktır ya da aralıkların birleşimidir. Örneğin $f(x)=\frac{x^2+5}{(x-1)(x-2)}$ fonksiyonu $f:(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)\to\mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyondur. Ayrıca $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun tanım kümesi $X=[0,\infty)$ fakat $f(x)=x^2-x$ fonksiyonunun tanım kümesi $X=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ şeklindedir.

Analiz, *limit* kavramı üzerine inşa edilmiştir. Bu kavram, analizi cebir ve trigonometriden ayırır. Bölüm 13.2'den Bölüm 13.6'ya kadar limitler üzerinde duracağız. Bunu yaparken, analiz ile ilgili bir hazırlık dersi aldığınızı ve limit ile ilgili temel konuları bildiğinizi varsayacağız. Önceki çalışmalarınızı daha sağlam bir temele oturtmak ve ileride yapacağınız çalışmalara sizi hazırlamak için konuların teorik yönüyle daha çok ilgileneceğiz.

Analizde, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının önemli rol oynadığı başka bir konu da diziler ve serilerdir. Bu konuları Bölüm 13.7 ve 13.8'de işleyeceğiz.

Bütün bu anlatılanlar için *üçgen eşitsizliği* adı verilen bir sonucu bilmek gerekir. Bu nedenle üçgen eşitsizliğini vererek başlayalım.

13.1 Üçgen Eşitsizliği

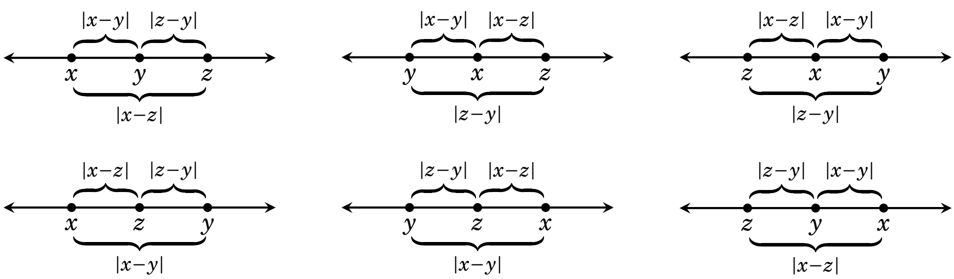
Analizdeki tanımlarda mutlak değer yaygın bir şekilde kullanılır. Bildiğiniz üzere bir x reel sayısının mutlak değeri, aşağıdaki negatif olmayan sayıdır:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Mutlak değerin temel özelliklerinden iki tanesi $|xy| = |x| \cdot |y|$ ve $x \leq |x|$ olmasıdır. İspatlarda sıkça kullanılan bir başka özelliği de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 13.1 (Üçgen eşitşizliği) Eğer $x, y, z \in \mathbb{R}$ ise $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ olur.

İspat. Bu teorem "Sayı doğrusu üzerindeki bir 'üçgen'in herhangi bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından büyük olamaz." şeklinde yorumlanabilir. *Üçgen eşitsizliği,* ismini bu gözlemden alır. Gerçekten de herhangi iki $a, b \in \mathbb{R}$ arasındaki uzaklık $|a-b|$ ile verilir. Buna göre x, y, z sayılarının sırasından bağımsız olarak $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ eşitsizliğinin doğruluğu aşağıdaki şekillerden görülebilir:



(Bu şekillerdeki x, y, z sayıları birbirinden farklı gösterilmiştir. Eğer $x = y$, $x = z$ veya $y = z$ ise $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ eşitsizliği otomatikman doğrudur.) ∎

Üçgen eşitsizliği, eğer z noktası x ile y arasında değil ise x noktasından y noktasına giden en kısa yolun z noktasına uğramadığını belirtir. Birçok sonuç bu gözleme dayanır. Örneğin $z = 0$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x-y| \leq |x| + |y| \tag{13.1}$$

olur. Ayrıca $|x+y| = |x-(-y)| \leq |x-0| + |0-(-y)| = |x| + |y|$ olduğundan

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{13.2}$$

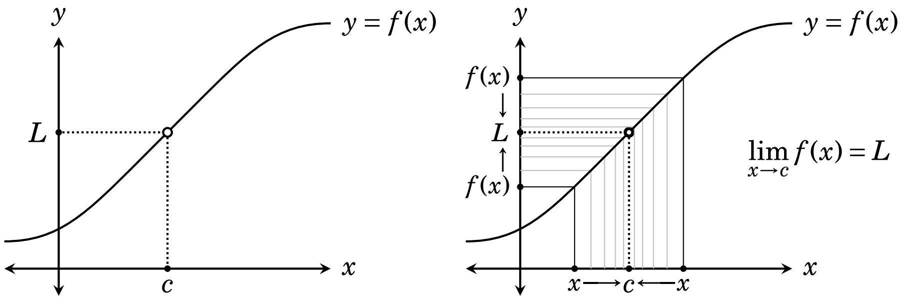
yazılabilir. Bunlara ek olarak $|x-0| \leq |x-(-y)| + |-y-0|$ olur ve buradan

$$|x| - |y| \leq |x+y| \tag{13.3}$$

elde edilir. Eşitsizlik 13.1, 13.2 ve 13.3 ispatlarda oldukça kullanışlıdır.

13.2 Limit Tanımı

Limit; x değişkeni bir c sayısına yaklaştığında, belirli bir f fonksiyonunun davranışını incelemek için dizayn edilmiş matematiksel bir araçtır. İhtimal dahilinde $f(c)$ tanımlı olmayabilir. Bu nedenle f fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterildiği gibi (c,L) noktasında boşluk olan bir eğridir.



Yukarıdaki şekle göre herhangi bir $x \neq c$ sayısına karşılık gelen $f(x)$ değeri, L sayısından ya büyüktür ya da küçüktür. Fakat sağ tarafta gösterildiği gibi x değişkeni c noktasına yaklaştıkça, $f(x)$ değeri de L sayısına yaklaşır. Bu olay $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle x değişkeni c noktasına yaklaştıkça, $f(x)$ değerinin yaklaştığı sayı $\lim_{x \to c} f(x)$ sembolü ile temsil edilir.

Analiz ders kitabınızdaki limit tanımı muhtemelen aşağıdaki gibi sezgisel olarak taktim edilmiştir.

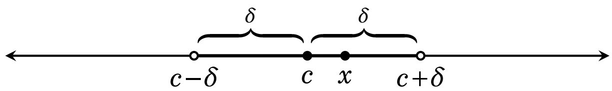
Tanım 13.1 (Kabaca limit tanımı) Bir f fonksiyonu ve c noktası verilsin. O zaman $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ifadesi, x değişkeni bir c noktasına yeterince yakın iken $f(x)$ değerinin de L sayısına yeterince yakın olması anlamına gelir.

Buradaki ana fikir şudur: x değeri c noktasına yeterince yakın seçilerek, $f(x)$ değeri L sayısına ne kadar yakın yapılmak isteniyorsa o kadar yakın (veya daha da yakın) yapılabilir.

İlk birkaç dönemde verilen analiz dersleri için Tanım 13.1 yeterli olabilir. Ancak daha derin ve titiz bir çalışma yapmak için yeterli değildir. Sorun, bu tanımın yeterince net olmamasıdır. *Yakınlıktan* kasıt nedir? Aslında x değişkeninin c noktasına "yakın" olduğunu söylemek, bir n tamsayının "çift" olduğunu söylemeye benzer. Böyle belirsiz ifadelerle hiçbir ispat yapılamaz.

Bu bölümde yapılacak ilk iş, ileri analizde kullanılabilecek tam ve net bir limit tanımı inşa edip geliştirmek olmalıdır. Bu işi yapmak, *yakınlık* kavramıyla başa çıkmamıza olanak sağlar. *Yakınlık* ne olmalıdır? $0,1$ birim? $0,001$ birim? $0,0001$ birim ya da daha yakın? Niceliksel bir yakınlık ölçüsü vererek bu tanımı daha net bir hâle getirebiliriz.

Pratikte, x değerinin c sayısına ve $f(x)$ değerinin L sayısına ne kadar yakın olduğunu göstermek için Yunan alfabesinin sırasıyla δ (delta) ve ε (epsilon) harfleri kullanılır. Örneğin x ile c arasındaki uzaklığın δ'dan küçük olması için gerek ve yeter şart $c-\delta < x < c+\delta$ olmasıdır. Yani $-\delta < x-c < \delta$ veya $|x-c| < \delta$ olmasıdır. Böylece (ne kadar küçük olursa olsun) her $\delta > 0$ için $|x-c| < \delta$ ifadesi, x ile c arasıdaki mesafenin δ'dan küçük olduğunu belirtir.



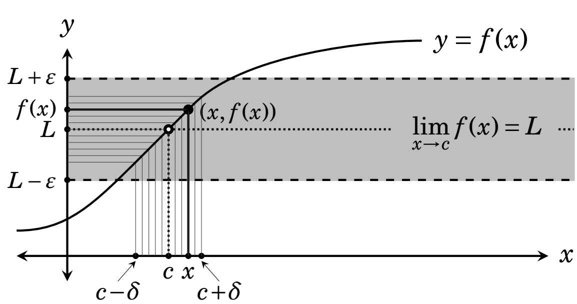
Aynı şekilde $|f(x)-L| < \varepsilon$ ifadesi, $f(x)$ ile L arasındaki uzaklığın ε'dan küçük olduğunu belirtir. Şimdi, bu fikirleri kullanıp Tanım 13.1'i satır satır açalım.

Kaba tanım		**Net tanım**
$\lim_{x\to c} f(x) = L$ ifadesi,	$\leadsto$	$\lim_{x\to c} f(x) = L$ ifadesi,
x değişkeni c'ye yaklaştığında	$\leadsto$	(her $\varepsilon > 0$ için) $0 < \|x-c\| < \delta$ olduğunda
$f(x)$ değerinin L'ye yaklaşması	$\leadsto$	$\|f(x)-L\| < \varepsilon$ (olacak şekilde $\delta > 0$) olması
anlamına gelir.	$\leadsto$	anlamına gelir.

Artık limitin net yani matematiksel tanımını verebiliriz.

Tanım 13.2 (Limitin matematiksel tanımı) Kabul edelim ki $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ifadesi, (ne kadar küçük olursa olsun) her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < |x-c| < \delta$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısının olduğu anlamına gelir.

Şekil 13.1 bu tanımı açıklar. Ne kadar küçük olursa olsun, her $\varepsilon > 0$ için y−koordinatı $y = L-\varepsilon$ ile $y = L+\varepsilon$ sayıları arasında kalan taralı şeridi ele alalım. Bu ε sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki x değerinin c noktasına uzaklığı δ'dan küçük olduğunda $(x, f(x))$ noktası taralı şerit içinde kalır. Bir başka deyişle, $0 < |x-c| < \delta$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ olur.



Şekil 13.1: Limit tanımının grafiksel açıklaması

Sırasıyla üç tane yorum yapalım. Birincisi, f fonksiyonu ve c noktasına bağlı olarak $x = c$ için $f(c)$ tanımlı olmayabilir. Bu durumdan kaçınmak için Tanım 13.2'de $|x-c| < \delta$ ifadesi yerine $0 < |x-c| < \delta$ kullanılır.

İkincisi, $(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ kümesini f fonksiyonunun tanım kümesinin altkümesi yapacak şekilde bir $\delta > 0$ olduğu sürece Tanım 13.2 geçerlidir. Aksi hâlde δ ne kadar küçük olursa olsun "$0 < |x-c| < \delta$ *olduğunda* $|f(x)-L|$ *olur*" önermesi bazı x değerleri için anlamsızdır. O hâlde $x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ yani c noktasına "yakın" olan her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x)$ tanımlı ise $\lim_{x \to c} f(x)$ anlamlıdır.

Üçüncüsü, Tanım 13.2 şu şekilde yazılabilir: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ancak ve ancak

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \big(0 < |x-c| < \delta\big) \Rightarrow \big(|f(x)-L| < \varepsilon\big). \qquad (13.4)$$

Buna göre $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ifadesinin ve Eşitlik 13.4'ün ispatları eşdeğerdir.

Eşitlik 13.4'ü kanıtlamak için doğrudan ispat yaklaşımı kullanılabilir. Bunun için $\varepsilon > 0$ kabul edilir ve $\big(0 < |x-c| < \delta\big) \Rightarrow \big(|f(x)-L| < \varepsilon\big)$ olacak şekilde bir δ bulunur. Bahsedilen δ sayısını bulmak için $|f(x)-L|$ ifadesi $|x-c|$ parantezine alınır. Eğer bu yapılabilirse $|f(x)-L| < \varepsilon$ olması için $|x-c|$ ifadesinin ne kadar küçük olması gerektiği çoğu zaman görülebilir.

Bu fikri Örnek 13.1'de kullanarak $\lim_{x \to 2}(3x+4) = 10$ olduğunu gösterelim. Burada $f(x) = 3x+4$ ve $L = 10$ için $|f(x)-L| = |(3x+4)-10|$ ve $|x-c| = |x-2|$ olur.

Örnek 13.1 $\lim_{x \to 2}(3x+4) = 10$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ olsun. Dikkat edilirse

$$|(3x+4)-10| = |3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$$

olur. Eğer $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ seçilirse $0 < |x-2| < \delta$ ifadesinden $|(3x+4)-10| = 3|x-2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ yazılabilir. Sonuç olarak her $\varepsilon > 0$ için öyle bir δ vardır ki $0 < |x-2| < \delta$ olduğunda $|(3x+4)-10| < \varepsilon$ olur. Tanım 13.2'den $\lim_{x \to 2}(3x+4) = 10$ bulunur. ■

Örnek 13.2 $\lim_{x \to 2} 5x^2 = 20$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ olsun. Dikkat edilirse

$$|f(x)-L| = |5x^2-20| = |5(x^2-4)| = |5(x-2)(x+2)| = 5 \cdot |x-2| \cdot |x+2|$$

olur. Böylece $|f(x)-L|$ ifadesini $|x-2|$ çarpanını içerecek şekilde çarpanlarına ayırdık. Bu çarpım aynı zamanda $|x+2|$ çarpanını içerir. Eğer $|x-2|$ küçük bir sayı ise x değeri 2'ye, $|x+2|$ değeri de 4'e yakındır. Aslına bakılırsa $|x-2| \le 1$ için $|x+2| = |(x-2)+4| \le |x-2| + |4| \le 1+4 = 5$ olur. Bir başka deyişle $|x-2| \le 1$ ise $|x+2| \le 5$ olur. Buna göre yukardaki eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$|f(x)-L| = |5x^2-20| = 5 \cdot |x-2| \cdot |x+2| < 5 \cdot |x-2| \cdot 5 = 25|x-2|.$$

Şimdi hem 1'den hem de $\frac{\varepsilon}{25}$'ten küçük bir δ seçelim. Eğer $0 < |x-2| < \delta$ ise $|5x^2-20| < 25 \cdot |x-2| < 25\delta < 25\frac{\varepsilon}{25} = \varepsilon$ olur. Tanım 13.2'den $\lim_{x \to 2} 5x^2 = 20$ olur. ■

Yukarıdaki örnekler (ve aşağıdaki alıştırmalar) muhtemelen size çok basit gelecek limitleri içerir. Amacımız, zor limitleri hesaplamak değil Tanım 13.2'yi uygulamaktır. Bu tanımın etkili bir şekilde kullanılacağı zor limitler daha sonra alacağınız ileri seviye derslerde karşınıza çıkacaktır.

Bölüm 13.2 Alıştırmaları

1. $\lim_{x\to 5}(8x-3)=37$ olduğunu gösteriniz.

2. $\lim_{x\to -1}(4x+6)=2$ olduğunu gösteriniz.

3. $\lim_{x\to 0}(x+2)=2$ olduğunu gösteriniz.

4. $\lim_{x\to 8}(2x-7)=9$ olduğunu gösteriniz.

5. $\lim_{x\to 3}(x^2-2)=7$ olduğunu gösteriniz.

6. $\lim_{x\to 1}(4x^2+1)=5$ olduğunu gösteriniz.

13.3 Var Olmayan Limitler

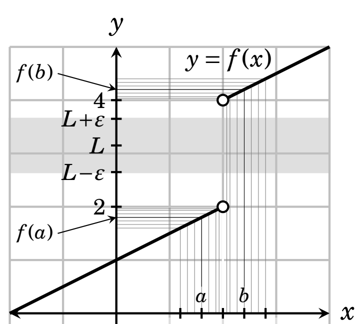
Bir f fonksiyonu ve c noktası verilsin. İki hâlde $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ifadesi yanlıştır. Birincisi, $\lim_{x\to c} f(x)=M$ olacak şekilde farklı bir $M\neq L$ vardır. İkincisi, Eşitlik 13.4'teki önerme *tüm* L reel sayıları için yanlıştır. Böyle durumlarda $\lim_{x\to c} f(x)$ **yoktur** denir. Bunu göstermek için olmayana ergi yöntemi kullanılabilir: $\lim_{x\to c} f(x)=L$ olduğu kabul edilir ve bir çelişkiye ulaşılır.

Örnek 13.3 Eğer $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$ ise $\lim_{x\to 2} f(x)$ yoktur. İspatlayınız.

İspat. Paydası sıfır olduğu için $f(2)$ tanımsızdır. Ayrıca x değişkeninin 2'nin sağında ve solunda olmasına bağlı olarak $f(x)$ farklı davranır. Eğer $x<2$ ise $x-2$ negatif olacağı için $|x-2|=-(x-2)$ ve $\frac{|x-2|}{x-2}=-1$ olur. Buradan $f(x)=\frac{x}{2}+1$ bulunur. Eğer $x>2$ ise $x-2$ pozitif olacağı için $|x-2|=x-2$ ve $\frac{|x-2|}{x-2}=1$ olur. Buradan $f(x)=\frac{x}{2}+3$ bulunur. O hâlde f parçalı tanımlı bir fonksiyondur:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+3, & x>2\\ \frac{1}{2}x+1, & x<2.\end{cases}$$

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $\lim_{x\to 2} f(x)=L$ olsun. Eğer $\varepsilon=\frac{1}{2}$ seçersek Tanım 13.2 gereğince öyle bir $\delta>0$ vardır ki $0<|x-2|<\delta$ olduğunda $\left|f(x)-L\right|<\frac{1}{2}$ olur. Şimdi, $a=2-\frac{\delta}{2}$ için $0<|a-2|<\delta$ ve $\left|f(a)-L\right|<\frac{1}{2}$ olur. Benzer şekilde $b=2+\frac{\delta}{2}$ için $0<|b-2|<\delta$ ve $\left|f(b)-L\right|<\frac{1}{2}$ olur. Dahası, $f(a)<2$ ve $f(b)>4$ olduğu için $2<|f(b)-f(a)|$ yazılabilir. Buradan, aşağıda verilen $2<1$ çelişkisine ulaşılır:

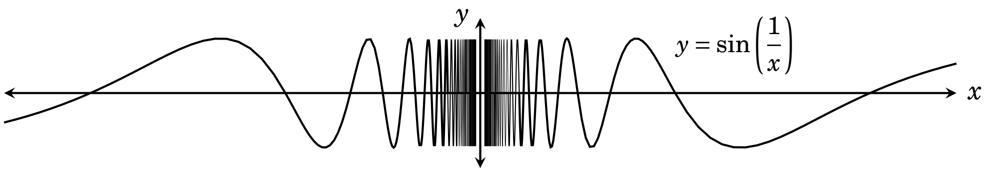


$$2<\left|f(b)-f(a)\right|=\left|\big(f(b)-L\big)-\big(f(a)-L\big)\right|\leq \left|f(b)-L\right|+\left|f(a)-L\right|<\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1. \qquad \blacksquare$$

Şimdi, var olmayan limitler için verilen klasik bir örneğe bakalım. Genel olarak bu örnek birinci sınıf ders kitaplarında basit bir şekilde ele alınır.

Örnek 13.4 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ yoktur. İspatlayınız.

Dikkat edilirse x değişkeni 0 noktasına yaklaştıkça $\frac{1}{x}$ değeri büyüyerek sonsuza yaklaşır. Bu sırada $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonu yukarı-aşağı sıçrama hareketi yapar. Üstelik x değişkeni 0'a yaklaştıkça sıçrama hareketi daha da hızlanır.



Sezgisel olarak, limitin olmadığı söylenebilir çünkü x değişkeni 0 noktasına yaklaştıkça $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonu sabit bir sayıya yaklaşmaz. İşte ispatı:

İspat. Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = L$ olsun. Tanım 13.2'ye göre öyle bir δ vardır ki $0 < |x-0| < \delta$ iken $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - L\right| < \frac{1}{4}$ olur. Önce, $\frac{1}{k\pi} < \delta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Buna göre $0 < \left|\frac{1}{k\pi} - 0\right| < \delta$ iken $\left|\sin\left(\frac{1}{1/k\pi}\right) - L\right| < \frac{1}{4}$ olur. Buradan $\left|\sin(k\pi) - L\right| = |0-L| = |L| < \frac{1}{4}$ bulunur. Sonra, $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\ell\pi} < \delta$ olacak şekilde bir $\ell \in \mathbb{N}$ seçelim. Buna göre $0 < \left|\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\ell\pi} - 0\right| < \delta$ iken $\left|\sin\left(\dfrac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\ell\pi}}\right) - L\right| < \frac{1}{4}$ olur. Buradan $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) - L\right| = |1-L| < \frac{1}{4}$ bulunur.

Yukarıda $|L| \leq \frac{1}{4}$ ve $|1-L| \leq \frac{1}{4}$ olduğunu gösterdik. Bu bilgiyi kullanarak $1 = \left|L + (1-L)\right| \leq \left|L\right| + \left|1-L\right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ yani $1 < \frac{1}{2}$ çelişkisine ulaşırız. ■

Örnek 13.5 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ limitini araştırınız.

Bu örnek, fazladan bir x çarpanı dışında önceki örnekle aynıdır. Ancak $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ olduğu için x değişkeni 0'a yaklaştıkça $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonunun 0'a gitmesi beklenir. Şimdi gerçekten de $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ olduğunu gösterelim.

İspat. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon$ seçelim. Dikkat edilirse $0 < |x-0| < \delta$ ifadesi $|x| < \delta$ ve $|x| < \varepsilon$ ile eşdeğerdir. Buradan $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ yazılabilir. Tanım 13.2'den $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ elde edilir. ■

Son bir not: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ifadesinin anlamlı olması için $f(x)$ fonksiyonunu her $x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ için tanımlı yapacak bir δ olması gerektiğini 248. sayfada vurgulamıştık. Örneğin, Tanım 13.2'ye göre $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ yoktur çünkü $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ aralığının bütünü üzerinde $\sqrt{x}$ tanımlı değildir. Analiz kitapları $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ şeklinde *sağdan limit* kavramını tanıtır. Tanım 13.2 bunun için programlanmamış olsa da bu uyarlamaları ileriki derslerde görebilirsiniz.

Bölüm 13.3 Alıştırmaları

Aşağıdaki limitlerin var olmadıklarını gösteriniz.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \log_{10}|x|$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0} x\cot\left(\frac{1}{x}\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-2x+1}$

13.4 Limit Kuralları

Analiz I kitapları, $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)$ gibi birçok *limit kuralı* verir. Bu kurallar, karmaşık limitleri basit limitlere indirgeyip hesaplamaya yardım eder. Fakat kullandığınız kitap, *ispatlarını* vermek yerine bu kuralların makul (ve faydalı) gözlemler olduğunu kabul etmenizi istemiş olabilir.

Şimdi, Tanım 13.2'yi kullanarak bazı limit kurallarını ispatlayalım. Bunu yapmak, iki amaca hizmet eder. Birincisi, analiz bilginizi daha sağlam bir temele oturtur. İkincisi, ileriki derslerde ve çalışmalarda yer alan limit ispatlarında faydalı olabilecek yöntemleri ve düşünce kalıplarını aydınlatır.

Sayfa 245'deki verilen 13.1, 13.2 ve 13.3 eşitsizlikleri burada çok önemli bir rol oynar. Herhangi bir hatırlatma yapmadan kullanacağımız bu eşitsizlikleri kolaylık açısından tekrar verelim: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|x-y| \le |x|+|y|, \qquad |x+y| \le |x|+|y|, \qquad |x|-|y| \le |x+y|.$$

İlk limit kuralı, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = a$ sabit fonksiyonu ile ilgilidir. Bu fonksiyonun grafiği, $y-$eksenini a noktasında kesen yatay bir doğrudur. Her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$ olduğu yeterince açık olsa da bunu ispatlayalım.

Teorem 13.2 (Sabit fonksiyon kuralı) Eğer $a \in \mathbb{R}$ ise $\lim\limits_{x\to c} a = a$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{R}$ olsun. Tanım 13.2'ye göre $\lim\limits_{x\to c} a = a$ olduğunu ispatlamak için her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-c| < \delta$ iken $|a-a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmak gerekir. Bu çok kolaydır. Eğer $\delta = 1$ (ya da başka bir sayı) seçilirse $|a-a| = 0$ olduğu için $|a-a| < \varepsilon$ otomatikman sağlanır. ■

Reel sayılar üzerindeki *birim fonksiyon* $f(x) = x$ kuralı ile tanımlanır. Bu fonksiyon için $\lim\limits_{x\to c} f(x) = c$ olduğunu ispatlayalım.

Teorem 13.3 (Birim fonksiyon kuralı) Eğer $c \in \mathbb{R}$ ise $\lim\limits_{x\to c} x = c$ olur.

İspat. Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $\delta = \varepsilon$ seçilirse $0 < |x-c| < \delta$ eşitsizliği $|x-c| < \varepsilon$ eşitsizliğini gerektirir. Bu ise Tanım 13.2'den $\lim\limits_{x\to c} x = c$ anlamına gelir. ■

Teorem 13.4 (Sabit çarpan kuralı)
Eğer $\lim_{x\to c} f(x)$ limiti var ve $a \in \mathbb{R}$ ise $\lim_{x\to c} af(x) = a \lim_{x\to c} f(x)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{x\to c} f(x)$ var olsun. $\lim_{x\to c} af(x) = a \lim_{x\to c} f(x)$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $a = 0$ ise bu limit, $\lim_{x\to c} 0 = 0$ hâlini alır ki Teorem 13.2'den bu doğrudur. Bu nedenle ispatın geri kalan kısmında $a \neq 0$ varsayılabilir.

Şimdi, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ kabul edip $\lim_{x\to c} af(x) = aL$ olduğunu gösterelim. Tanım 13.2'ye göre $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-c| < \delta$ iken $|af(x)-aL| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmamız gerekir. O hâlde $\varepsilon > 0$ seçelim. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olduğu için $0 < |x-c| < \delta$ iken $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{|a|}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bundan dolayı $0 < |x-c| < \delta$ iken $|af(x)-aL| = |a(f(x)-L)| = |a| \cdot |f(x)-L| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$ olur.

Özet olarak, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-c| < \delta$ iken $|af(x)-aL| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var olduğunu gösterdik. Tanım 13.2'den $\lim_{x\to c} af(x) = aL$ olur. ■

Teorem 13.5 (Toplam kuralı)
Eğer $\lim_{x\to c} f(x)$ ve $\lim_{x\to c} g(x)$ var ise $\lim_{x\to c} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M$ olsun. $\lim_{x\to c} \big(f(x)+g(x)\big) = L+M$ olduğunu göstermeliyiz. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-c| < \delta$ iken $\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\big| < \varepsilon$ olacak şekilde bir δ bulmak gerekir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\big| &= \big|\big(f(x)-L\big)+\big(g(x)-M\big)\big| \\ &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olduğu için $0 < |x-c| < \delta'$ iken $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\delta' > 0$ vardır. Ayrıca $\lim_{x\to c} g(x) = M$ olduğu için $0 < |x-c| < \delta''$ iken $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\delta'' > 0$ vardır. Şimdi $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ yani δ' ve δ'' sayılarından küçük olanı δ olsun. Buna göre eğer $0 < |x-c| < \delta$ ise (A)'da verilen eşitsizlikten $\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ elde edilir.

Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-c| < \delta$ iken $\big|\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)\big| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var olduğunu gösterdik. Böylece $\lim_{x\to c} \big(f(x)+g(x)\big) = L+M$ olur. ■

Teorem 13.6 (Fark kuralı)
Eğer $\lim_{x\to c} f(x)$ ve $\lim_{x\to c} g(x)$ var ise $\lim_{x\to c} \big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$ olur.

İspat. Toplam ve sabit çarpan kurallarından aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} \big(f(x)-g(x)\big) &= \lim_{x\to c} \big(f(x)+(-1)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} (-1)\cdot g(x) \\ &= \lim_{x\to c} f(x) + (-1)\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x). \end{aligned}$$ ■

Teorem 13.7 (Çarpım kuralı)
Eğer $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ var ise $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ olsun. $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = LM$ olduğunu göstermeliyiz. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-c| < \delta$ iken $\left|f(x)g(x) - LM\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir δ bulmamız gerekir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} \left|f(x)g(x)-LM\right| &= \left|\left(f(x)g(x)-Lg(x)\right)+\left(Lg(x)-LM\right)\right| \\ &\le \left|f(x)g(x)-Lg(x)\right| + \left|Lg(x)-LM\right| \\ &= \left|\left(f(x)-L\right)g(x)\right| + \left|L\left(g(x)-M\right)\right| \\ &= \left|f(x)-L\right|\cdot\left|g(x)\right| + |L|\cdot\left|g(x)-M\right| \qquad \text{(A)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ olduğu için $|x-c|$ yeterince küçük seçilerek (A)'daki $|f(x)-L|$ ve $|L|\cdot|g(x)-M|$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Ancak $\left|f(x)-L\right|\cdot\left|g(x)\right|$ terimi biraz problemlidir çünkü $\left|f(x)-L\right|$ küçüldükçe $\left|g(x)\right|$ büyüyebilir. Bu sorunu aşmak için $\delta' > 0$ sayısını, $0 < |x-c| < \delta'$ iken $\left|g(x)-M\right| < 1$ olacak kadar küçük seçelim. O hâlde $0 < |x-c| < \delta'$ olduğu sürece

$$\left|g(x)\right| = \left|\left(g(x)-M\right)+M\right| \le \left|g(x)-M\right| + |M| < 1 + |M|$$

olur. Buna göre (A)'da verilen $\left|g(x)\right|$ çarpanını, ondan daha büyük olan $1+|M|$ ile değiştirirsek $0 < |x-c| < \delta'$ olduğu sürece aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|f(x)g(x)-LM\right| < \left|f(x)-L\right|\cdot\left(1+|M|\right) + |L|\cdot\left|g(x)-M\right|. \qquad \text{(B)}$$

Şimdi, $0 < |x-c| < \delta''$ iken $\left|f(x)-L\right| < \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}$ olacak şekilde bir $\delta'' > 0$ ve $0 < |x-c| < \delta'''$ iken $\left|g(x)-M\right| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$ olacak şekilde $\delta''' > 0$ sayılarını seçelim. Buna göre $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ olsun. Eğer $0 < |x-c| < \delta$ ise (B) eşitsizliği

$$\left|f(x)g(x)-LM\right| < \frac{\varepsilon}{2(1+|M|)}\cdot\left(1+|M|\right) + |L|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

hâlini alır. O hâlde her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-c| < \delta$ iken $\left|f(x)g(x)-LM\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ olduğunu gösterdik. Sonuç olarak $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = LM$ olur. ■

Son olarak vereceğimiz kuralın ispatı, çarpım kuralının ispatına benzer ancak paydalarla ilgilenirken biraz dikkatli olmamız gerekir.

Teorem 13.8 (Bölüm kuralı)
Eğer $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ile $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ var ve üstelik $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$ ise $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M \neq 0$ olsun. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-c| < \delta$ iken $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir δ bulmamız gerekir. Dikkat edilirse

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| = \left|\frac{Mf(x)-Lg(x)}{Mg(x)}\right| &= \left|\frac{\big(Mf(x)-LM\big)-\big(Lg(x)-LM\big)}{Mg(x)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{g(x)}\big(f(x)-L\big) - \frac{L}{Mg(x)}\big(g(x)-M\big)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{g(x)}\big(f(x)-L\big)\right| + \left|\frac{L}{Mg(x)}\big(g(x)-M\big)\right| \\
&= \frac{1}{\big|g(x)\big|}\cdot\big|f(x)-L\big| + \frac{1}{\big|g(x)\big|}\cdot\left|\frac{L}{M}\right|\cdot\big|g(x)-M\big| \qquad \text{(A)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M$ olduğu için $|x-c|$ yeterince küçük seçilerek, (A)'daki $\big|f(x)-L\big|$ ve $\left|\frac{L}{M}\right|\cdot\big|g(x)-M\big|$ istenildiği kadar küçük yapılabilir. Şimdi $\frac{1}{|g(x)|}$ çarpanı ile ilgilenelim. Bunun için $\delta' > 0$ sayısını, $0 < |x-c| < \delta'$ iken $\big|g(x)-M\big| < \frac{|M|}{2}$ olacak şekilde seçelim. Buna göre eğer $0 < |x-c| < \delta'$ ise

$$\big|g(x)\big| = \big|M + \big(g(x)-M\big)\big| \geq \big|M\big| - \big|g(x)-M\big| > \big|M\big| - \tfrac{|M|}{2} = \tfrac{|M|}{2}$$

olur. Böylece $\big|g(x)\big| > \frac{|M|}{2}$ ya da $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$ yazılabilir. Eğer (A)'da verilen $\frac{1}{|g(x)|}$ terimini, ondan daha büyük olan $\frac{2}{|M|}$ ile değiştirsek $0 < |x-c| < \delta'$ iken

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \frac{2}{|M|}\cdot\big|f(x)-L\big| + \left|\frac{2L}{M^2}\right|\cdot\big|g(x)-M\big| \qquad \text{(B)}$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur.

1. Durum $L \neq 0$ olsun. Buna göre $0 < |x-c| < \delta''$ iken $\big|f(x)-L\big| < \frac{\varepsilon|M|}{4}$ ve $0 < |x-c| < \delta'''$ iken $\big|g(x)-M\big| < \varepsilon\left|\frac{M^2}{4L}\right|$ olacak şekilde $\delta'' > 0$ ve $\delta''' > 0$ seçelim. Eğer $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ dersek $0 < |x-c| < \delta$ için (B) aşağıdaki hâle gelir:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \frac{2}{|M|}\cdot\frac{\varepsilon|M|}{4} + \left|\frac{2L}{M^2}\right|\cdot\varepsilon\left|\frac{M^2}{4L}\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Durum $L = 0$ olsun. Buna göre $0 < |x-c| < \delta''$ iken $\big|f(x)-L\big| < \frac{\varepsilon|M|}{2}$ olacak şekilde $\delta'' > 0$ seçelim. Eğer $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ dersek (B) aşağıdaki hâle gelir:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \frac{2}{|M|}\frac{\varepsilon|M|}{2} = \varepsilon.$$

İki durumda da her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-c| < \delta$ iken $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var olduğunu gösterdik. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Analiz dersinde, limit kurallarını ispatlamadıysanız bile onları yoğun bir şekilde *kullandınız*. Hatırlanacağı üzere $\lim_{x\to c} f(x)$ ifadesini hesaplarken karşılaşılan en yaygın problem, paydası sıfır olduğu için $f(c)$'nin tanımsız olmasıdır. Bu problem, paydada sıfıra neden olan terim sadeleştirilerek aşılır.

Örnek 13.6 $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{1-x}$ limitini hesaplayınız.

Burada x değişkeni 1'e yaklaşır. Eğer x yerine 1 yazılırsa $\frac{\frac{1}{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (tanımsız) olur. Ama $1-x$ terimini paydadan yok edip limit kurallarını uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{1-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{1-x}\,\frac{x}{x} && \text{(fonksiyon, } 1 = \tfrac{x}{x} \text{ ile çarpılır)}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)}{(1-x)x} && \text{(yukarıdaki } x \text{ çarpanı dağıtılır)}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} && \text{((}1-x\text{) çarpanları sadeleştirilir)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1} x} = \frac{1}{1} = 1. && \text{(limit kuralları uygulanır)}
\end{aligned}$$

Bölüm 13.4 Alıştırmaları

1. İki veya daha çok sayıda $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları verilsin. Her $1 \le i \le n$ için $\lim_{x\to c} f_i(x)$ var ise $\lim_{x\to c}\big(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\big) = \lim_{x\to c} f_1(x) + \lim_{x\to c} f_2(x) + \cdots + \lim_{x\to c} f_n(x)$ olduğunu, Teorem 13.5 ile tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayınız.

2. İki veya daha çok sayıda $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları verilsin. Her $1 \le i \le n$ için $\lim_{x\to c} f_i(x)$ var ise $\lim_{x\to c}\big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\big) = \Big(\lim_{x\to c} f_1(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to c} f_2(x)\Big)\cdots\Big(\lim_{x\to c} f_n(x)\Big)$ olduğunu, Teorem 13.7 ile tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayınız.

3. Eğer $f(x)$ bir polinom ise her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ önermesini, önceki iki alıştırma ile sabit çarpan kuralını (Teorem 13.4) kullanarak ispatlayınız.

4. Eğer $\frac{f(x)}{g(x)}$ rasyonel bir fonksiyon (bir polinomun başka bir polinoma bölümü) ve $g(c) \ne 0$ ise $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$ olduğunu Alıştırma 3'ü kullanarak ispatlayınız.

5. Tanım 13.2'yi kullanarak limitin tek olduğunu ispatlayınız. Bir başka ifadeyle $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} f(x) = M$ ise $L = M$ olduğunu gösteriniz.

6. *Sıkıştırma teoremi*: $\delta > 0$ olmak üzere $0 < |x-c| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) \le f(x) \le h(x)$ olsun. Eğer $\lim_{x\to c} g(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$ ise $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olur. İspatlayınız.

13.5 Süreklilik ve Türev

Limitlerin temel bir amacı, bir fonksiyonun "kötü" bir $x = c$ noktası civarında nasıl davrandığına dair bilgi edinmektir. Aslında $f(c)$ tanımlı olmasa bile $\lim_{x\to c} f(x) = L$ olacak şekilde bir L sayısı var olabilir. Bu durumda x değişkeni, yasaklı c noktasına yaklaştıkça $f(x)$ değerleri de L sayısına yaklaşır.

Elbette her $x = c$ noktası "kötü nokta" değildir. Üstelik $f(c)$ tanımlı ve $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ olabilir. Eğer f fonksiyonunun tanım kümesindeki her c için bu durum geçerli ise f *süreklidir* denir. Bir fonksiyonun sürekli olup olmaması ile ilgili konulara *süreklilik* konuları adı verilir.

Alınan ilk analiz dersinde, sürekliliğin öneminin gözden kaçması muhtemeldir. Yine ilk derste, süreklilik neredeyse görmezden gelinir. Hâlbuki analizin teorik temeli süreklilik kavramına dayanır. Kabaca söylersek

Eğer $\boxed{f \text{ sürekli ise}}$ o zaman $\boxed{f \text{ bazı önemli özelliklere sahiptir}}$

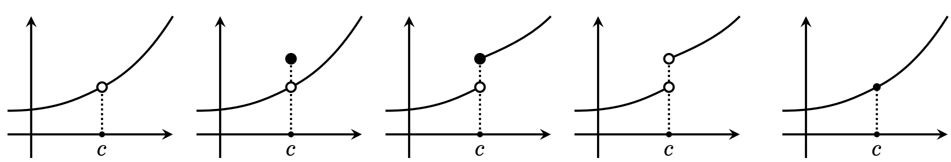
formunda sayısız teorem vardır. Süreklilik, fonksiyonlar hakkında önemli çıkarımlar yapmamızı sağlar. Aşağıda bunun tanımını bulabilirsiniz.

Tanım 13.3 Eğer $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ise $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında **süreklidir**. Bunun için aşağıdaki üç koşulun *birden* sağlanması gerekir.

1. $f(c)$ tanımlıdır,
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ vardır,
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Eğer bu koşullardan biri ya da birkaçı sağlanmıyor ise f fonksiyonu $x = c$ noktasında **süreksizdir**.

Bu tanımı açıklamak için aşağıda beş tane grafik verilmiştir. Bunlardan sadece en sağdaki fonksiyon $x = c$ noktasında süreklidir



1,3 sağlanmaz — 3 sağlanmaz — 2,3 sağlanmaz — 1,2,3 sağlanmaz — 1,2,3 sağlanır

$x = c$ noktasında $f(x)$ **süreksizdir**

$x = c$ noktasında $f(x)$ **süreklidir**

Tanıdık fonksiyonların çoğu, tanım kümelerine ait her $x = c$ noktasında süreklidir. Örneğin, önceki bölümün 3. ve 4. alıştırmalarına göre polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar kendi tanım kümeleri üzerinde süreklidir.

Sürekliliğin uygulamalarından biri de bileşke fonksiyonlar için limit kuralıdır. Önceki bölümde $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$ olduğunu kabul etmemiz istenebilirdi. Ancak süreklilik varsayımı olmadan bu kural geçerli değildir.

Teorem 13.9 (Bileşke kuralı) Kabul edelim ki $\lim_{x\to c} g(x) = L$ olsun. Eğer f fonksiyonu $x = L$ noktasında sürekli ise $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{x\to c} g(x) = L$ olsun. Buna ek olarak f fonksiyonu $x = L$ noktasında sürekli olsun. Tanım 13.2'ye göre $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ olduğunu göstermek için her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-c| < \delta$ iken $\left|f(g(x)) - f(L)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. Tanım 13.3'e göre f fonksiyonu L noktasında sürekli olduğu için $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$ olur. O hâlde öyle bir $\delta' > 0$ reel sayısı vardır ki

$$|x - L| < \delta' \text{ olduğunda } \left|f(x) - f(L)\right| < \varepsilon \text{ olur.} \qquad \text{(A)}$$

Aynı zamanda $\lim_{x\to c} g(x) = L$ olduğu için $0 < |x - c| < \delta$ olduğunda $\left|g(x) - L\right| < \delta'$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır.

Eğer $0 < |x-c| < \delta$ ise $\left|g(x) - L\right| < \delta'$ olur. O hâlde (A)'dan $\left|f(g(x)) - f(L)\right| < \varepsilon$ yazılabilir. Buradan $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Analizden bilindiği üzere reel değerli bir f fonksiyonunun **türevi**, limitin var olması koşulu ile

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

biçiminde tanımlı başka bir fonksiyondur. (Bu durumda f fonksiyonu c noktasında **türevlenebilir** denir.)

Hatırlanacağı üzere süreklilik, türevlenebilirlik için gereklidir.

Teorem 13.10 Eğer f bir noktada türevlenebilir ise o noktada süreklidir.

İspat. Kabul edelim ki f fonksiyonu bir c noktasında türevlenebilir olsun. Eğer f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) + f(c)$$

şeklinde yazılır ve her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{x\to c} f(x) = \left(\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) \cdot \left(\lim_{x\to c}(x - c)\right) + \lim_{x\to c} f(c) = f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c)$$

bulunur. O hâlde $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ olur. Yani f fonksiyonu c'de süreklidir. ■

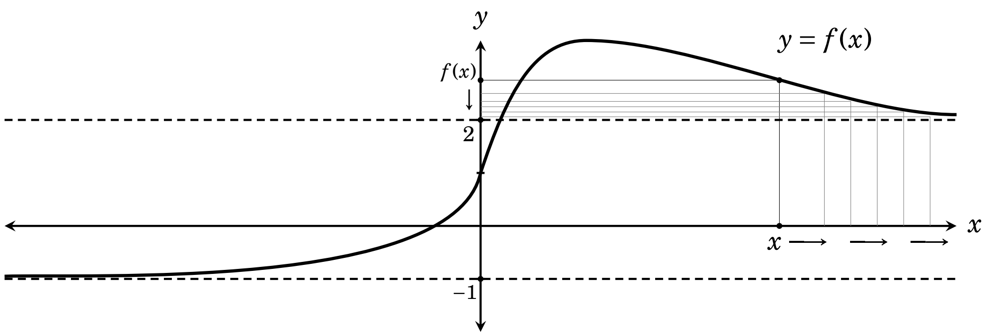
Bölüm 13.5 Alıştırmaları

1. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun her $c>0$ için sürekli olduğunu ispatlayınız. Eğer $\lim_{x\to c} g(x)$ var ve sıfırdan büyük ise $\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim_{x\to c} g(x)}$ olduğunu gösteriniz.

2. Süreklilik, Teorem 13.9 için gerekli bir koşuldur. Bu göstermek için $x=L$ noktasında sürekli *olmayan* bir f fonksiyonu ile $\lim_{x\to c} g(x)=L$ ve $\lim_{x\to c} f\left(g(x)\right)\neq f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$ şartlarını sağlayan bir g fonksiyonu bulunuz.

13.6 Sonsuzdaki Limitler

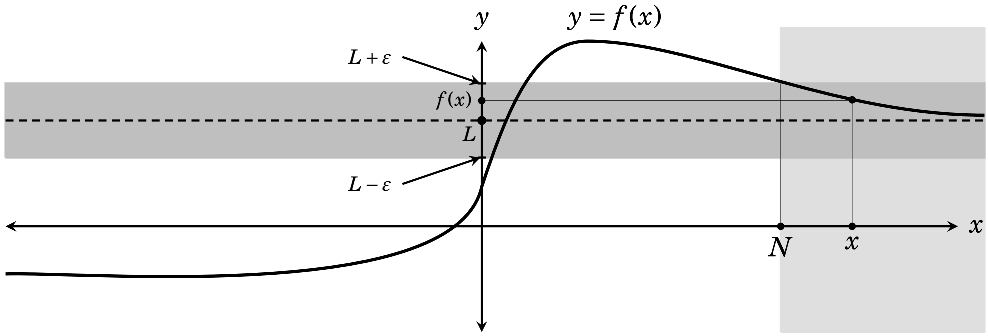
Bazı fonksiyonlar için $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ifadeleri anlamlıdır. Örneğin, aşağıda grafiği verilen fonksiyonu ele alalım. Eğer x sağa (yani sonsuza) doğru hareket ederse ona kaşılık gelen $f(x)$ değerleri 2'ye yaklaşır. Bunu sembolik olarak $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ ile ifade ederiz. Böyle bir limite *sonsuzdaki limit* adı verilir. Ancak bu ifade biraz hatalıdır çünkü x sonsuza doğru gider fakat hiçbir zaman sonsuz "olamaz."



Dikkat edilirse x değişkeni sonsuza yaklaştıkça fonksiyonun grafiği, noktalı çizgilerle gösterilen, $y=2$ doğrusuna yaklaşır. Bu doğruya, fonksiyonun bir **yatay asimptotu** denir. Asimptot, grafiğin bir parçası değildir ama x büyüdükçe $f(x)$ fonksiyonunun davranışını anlamamıza yardımcı olur.

Yine yukarıdaki şekile göre x sola (yani eksi sonsuza) doğru hareket ettikçe, ona karşılık gelen $f(x)$ değerleri -1'e yaklaşır. Bunu sembolik olarak $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ile gösteririz. O hâlde $y=-1$ yatay doğrusu, $f(x)$ fonksiyonu için ikinci bir yatay asimptottur.

Genel olarak $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ifadesi, x yeterince büyük (yani sonsuza yakın) seçilerek $f(x)$ değerinin L sayısına istenildiği kadar yakın bırakılabileceği anlamına gelir. Bir başka deyişle, her $\varepsilon>0$ için öyle bir $N>0$ vardır ki $x>N$ olduğunda $|f(x)-L|<\varepsilon$ olur. Bu kavram aşağıda gösterilmiştir.



Aynı şekilde $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ifadesi, x değişkeni eksi sonsuza yaklaşarak $f(x)$ değerini L sayısına istenildiği kadar yakın bırabileceği anlamına gelir. Bir başka deyişle, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N < 0$ vardır ki $x < N$ iken $\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$ olur. Aşağıda, bu fikirlerin bir özetini bulabilirsiniz.

Tanım 13.4 (Sonsuzdaki limitler)

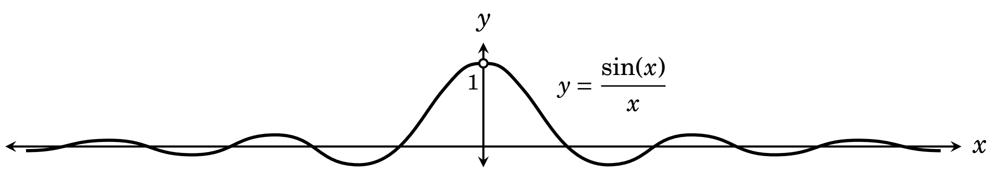
1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ ifadesi, her $\varepsilon > 0$ için $x > N$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ reel sayısı olması anlamına gelir.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ifadesi, her $\varepsilon > 0$ için $x < N$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N < 0$ reel sayısı olması anlamına gelir.

Örnek 13.7 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ limitini inceleyiniz.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin(x) \le 1$ olduğunu biliyoruz. O hâlde x büyüdükçe $\frac{\sin(x)}{x}$ ifadesinin küçülmesi beklenir. Bir başka deyişle $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ olmalıdır.

Şimdi, Tanım 13.4'ü kullanarak bunu ispatlayalım. Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $N = \frac{1}{\varepsilon}$ seçelim. Eğer $x > N$ ise $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ya da $\frac{1}{x} < \varepsilon$ yazılabilir. Buradan $-\varepsilon < \frac{1}{x}\sin(x) < \varepsilon$ ve böylece $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| < \varepsilon$ elde edilir.

Özet olarak, verilen bir $\varepsilon > 0$ için $x > N$ olduğunda $\left|\frac{\sin(x)}{x} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ vardır. Tanım 13.4 gereğince $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ olur.



Aynı mantıkla $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ olduğu ispatlanabilir. Böylelikle, yukarıda gösterildiği gibi, x−ekseni yani $y = 0$ doğrusu $\frac{\sin(x)}{x}$ için bir yatay asimptottur.

Sonsuzdaki her limit var olmak zorunda değildir. Örneğin $\lim_{x\to\infty} x^2$ limitini göz önüne alalım. Eğer x sonsuza giderse x^2 de sonsuza gider. Ortak akıl, bu limitin olmayacağını söyler çünkü x^2 değeri, sonlu her L sayısını aşar. İyi bir alıştırma olması bakımından bunu ispatlayalım.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $\lim_{x\to\infty} x^2 = L$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ olsun. Şimdi $\varepsilon = 1$ seçelim ve $x > N$ olduğunda $|x^2 - L| < 1$ olacak şekilde bir N bulmak için Tanım 13.4'ü uygulayalım. Eşitsizlik 13.3'e göre $|x^2| - |L| = |x^2| - |-L| \leq \left|x^2 + (-L)\right| = \left|x^2 - L\right| < 1$ yazılabilir. Bir başka ifade ile her $x > N$ için $x^2 - |L| < 1$ veya $x^2 < 1 + |L|$ olur. Ama bu ifade, N ve $1 + |L|$ sayılarının ikisinden de büyük x değerleri için yanlıştır. Bu ise bir çelişkidir.

Aslında $\lim_{x\to\infty} x^2$ var olmasa bile x sonsuza giderken x^2'nin sınırlanamaz bir şekilde büyüdüğünü belirtmek için $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ ifadesini kullanabiliriz. Genel anlamda $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ limiti, $f(x)$ değerinin eninde sonunda her L sayısını aşacağını belirtir.

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ifadesi, her L reel sayısı için $x > N$ olduğunda $f(x) > L$ olacak şekilde pozitif bir N olması anlamına gelir.
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ifadesi, her L reel sayısı için $x > N$ olduğunda $f(x) < L$ olacak şekilde pozitif bir N olması anlamına gelir.

Bir sonraki bölümde, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ formundaki limitler küçük bir rol oynar.

Bölüm 13.6 Alıştırmaları

Aşağıdaki alıştırmaları Tanım 13.4'ü kullanarak ispatlayınız. (Uygun olan her durumda, Bölüm 13.4'deki ilgili ispatı buraya uyarlayabilirsiniz.)

1. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$'dır. **2.** $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}$. **3.** Eğer $a \in \mathbb{R}$ ise $\lim_{x\to\infty} a = a$'dır.

4. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ var ve $a \in \mathbb{R}$ ise $\lim_{x\to\infty} af(x) = a \lim_{x\to\infty} f(x)$ olur.

5. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x)$ var ise $\lim_{x\to\infty} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ olur.

6. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x)$ var ise $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right)$ olur.

7. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to\infty} g(x)$ var ise $\lim_{x\to\infty} \big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} g(x)$ olur.

8. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ile $\lim_{x\to\infty} g(x)$ var ve $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$ olur.

9. Eğer $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ ve $x = L$ noktasında f sürekli ise $\lim_{x\to\infty} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right)$ olur.

10. $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ limitinin var olmadığını ispatlayınız.

13.7 Diziler

Son iki bölümde, dizileri ve serileri ele alacağız. Bu konular, genel olarak analiz dersinin ikinci döneminde verilir.

Hatırlanacağı üzere reel sayılardan oluşan ve uzunluğu sonsuz olan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots$$

biçimindeki bir listeye **dizi** denir. Burada a_1 sayısına *birinci terim*, a_2 sayısına *ikinci terim* denir. İsimlendirme bu şekilde devam eder. Örneğin,

$$2,\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{4}{9},\ \tfrac{5}{16},\ \tfrac{6}{25},\ \tfrac{7}{36},\ \cdots$$

dizisinin $n-$yinci terimi $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ ile verilir. Buna dizinin **genel terimi** denir.

Bir dizi, genel terimi için bir kural verilerek tanımlanabilir. Örneğin, genel terimi $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$ olan dizi aşağıda verilmiştir:

$$2,\ -\tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{3},\ -\tfrac{5}{4},\ \tfrac{6}{5},\ -\tfrac{7}{5},\ \cdots.$$

Genel terimi a_n olan dizi $\{a_n\}$ ile gösterilir. Örneğin yukarıdaki üç dizi; sırasıyla $\{a_n\}$, $\{\frac{n+1}{n^2}\}$ ve $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}\right\}$ biçiminde ifade edilebilir. Bu kapsamda $\{n^2+1\}$ ile temsil edilen dizi aşağıda verilmiştir.

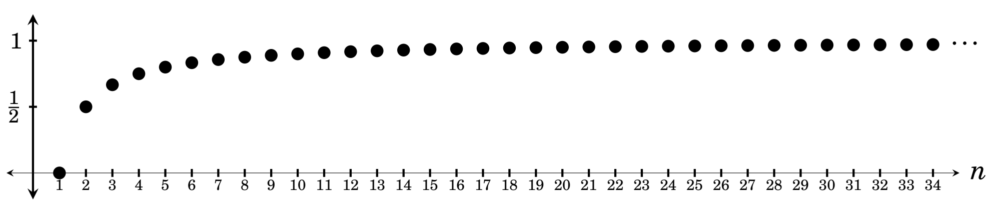
$$2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ \cdots.$$

Bazen bir diziyi tanımlamak için o dizinin ilk birkaç terimi yazılır ve sayı örüntüsünden genel terimin anlaşılması beklenir. Örneğin

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$$

örüntüsündeki ilk beş terimle uyuşan en açık kural n^2 olduğu için bunun $\{n^2\}$ dizisi olduğu düşünülebilir. Ancak sınırlı sayıda terim, sonsuz bir diziyi *hiçbir* zaman tam ve kusursuz olacak şekilde belirleyemez. Bu noktaya dikkat edilmelidir çünkü $1,4,9,16,25,\ldots$ dizisinin genel terimi $a_n = n^2$ değil de $a_n = n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ olabilir. Buna göre ilk beş terim uyuşsa da altıncı terim beklendiği üzere $a_6 = 36$ değil $a_6 = 156$'dır.

Bir $\{a_n\}$ dizisi, $f(n) = a_n$ şeklinde tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olarak düşünülebilir. Örneğin, $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisi $f(n) = 1-\frac{1}{n}$ fonksiyonudur. Bu manada dizinin grafiği çizilebilir. Ancak tanım kümesi $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{N}$ olduğu için grafik, bir eğri boyunca dizilmiş boncuklara benzer. İşte $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisinin grafiği:



Kabaca söylersek eğer n büyüdükçe a_n değerleri bir L sayısına yaklaşıyor ise o zaman $\{a_n\}$ dizisi L sayısına *yakınsıyor* denir.

Örneğin bir önceki sayfada verilen $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisi $L=1$ sayısına yakınsar çünkü n büyüdükçe $1-\frac{1}{n}$ ifadesi 1'e yaklaşır.

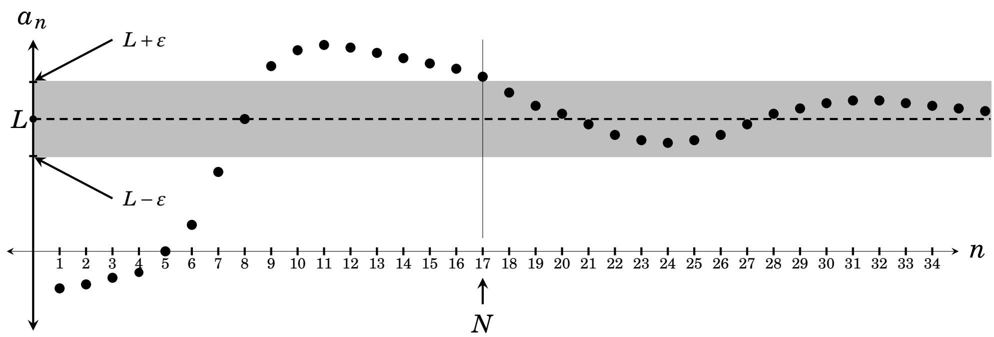
Yakınsaklıkla ilgili gözlemleri ispatlamak için net bir tanım gerekir. Bu tanım, Bölüm 13.6'da verilen sonsuzdaki limitler tanımından uyarlanabilir. Eğer n yeterince büyük olduğunda a_n değerleri bir L sayısına istenildiği kadar yakın bırakılabiliyor ise $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsar. İşte net tanım:

Tanım 13.5 Her $\varepsilon > 0$ için $n > N$ olduğunda $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ var ise $\{a_n\}$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına **yakınsar.**

Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsıyor ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ yazılır.

Eğer $\{a_n\}$ dizisi herhangi bir L'ye yakınsamıyor ise dizi **ıraksaktır** denir.

Tanım 13.5 aşağıda açıklanmıştır. Ne kadar küçük olursa olsun, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N tamsayısı vardır ki $n > N$ olduğunda, dizinin terimleri $L-\varepsilon$ ile $L+\varepsilon$ arasında kalır. Küçük ε değerleri, büyük N değerlerini gerektirir. Fakat ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin, $n > N$ iken L ile a_n arasındaki uzaklığı ε'dan küçük bırakacak şekilde (muhtemelen çok büyük) bir N sayısı vardır.



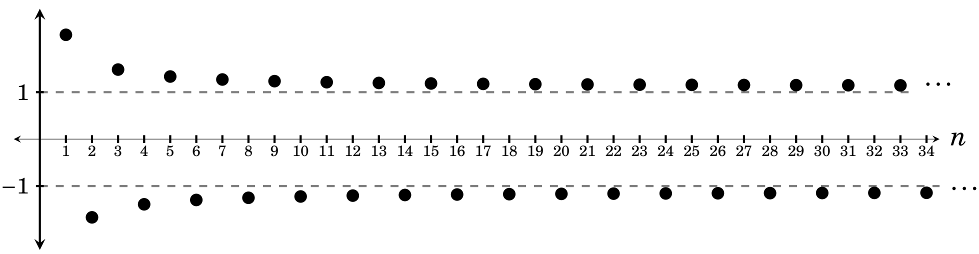
İlk örnek olarak önceki sayfada (s. 261) grafiği verilen $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisine geri dönelim. Dikkat edileceği üzere n arttıkça $\frac{1}{n}$ değeri 0'a, $1-\frac{1}{n}$ değeri de 1'e yaklaşır. Dolayısıyla dizinin 1'e yakınsak olduğu görülebilir. Şimdi Tanım 13.5'i kullanarak bunu ispatlayalım.

Örnek 13.8 $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisinin 1'e yakınsadığını ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $N > \varepsilon$ seçersek $\frac{1}{N} < \varepsilon$ yazılabilir. Böylelikle $n > N$ olduğunda $|a_n - 1| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ olur. Tanım 13.5 gereğince $\{1-\frac{1}{n}\}$ dizisi 1'e yakınsar. ■

Örnek 13.9 $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}\right\}$ dizisini inceleyiniz.

Dizinin ilk birkaç terimi $2, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{6}, \cdots$ şeklindedir. Dikkat edilirse tek terimler pozitif ve çift terimler negatif olacak biçimde dizin terimleri pozitif ile negatif arasında değişir. Bu dizinin grafiği aşağıda verilmiştir.



Bu şekile göre n arttıkça, dizinin terimleri 1 ile −1'e yakın değerler arasında gider gelir. Bu gözlem, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$ genel terimi incelenerek de yapılabilir. Dikkat edilirse n büyüdükçe $\frac{n+1}{n}$ ifadesi 1'e yaklaşır ama −1'in kuvvetleri terimlerin işaretini değiştir. Genel terim tek bir sayıya yaklaşmadığı için dizi ıraksaktır. Şimdi bunu ispatlayalım. İspatta şu argümanı kullanabiliriz: Eğer dizi bir L sayısına *gerçekten* yaklaşırsa L *hem* 1 *hem de* −1 sayılarına ε birim kadar uzaklıkta olur. Ancak $\varepsilon < 1$ ise bu imkânsızdır.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}\right\}$ dizisi bir L sayısına yakınsak olsun. Eğer $\varepsilon = 1$ seçersek Tanım 13.5'e göre öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > N$ olduğunda $\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} - L\right| < 1$ olur.

Eğer n tamsayısı tek ise $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} > 1$ olur. Fakat n çift ise $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = -\frac{n+1}{n} < -1$ olur. Şimdi $m > N$ olacak şekilde bir tek sayı ve $n > N$ olacak şekilde bir çift sayı seçelim. Yukarıdaki satırlardan

$$\begin{aligned}
2 = 1-(-1) &< a_m - a_n && (1 < a_m \text{ ve } 1 < -a_n)\\
&= \left|a_m - a_n\right| && (a_m - a_n \text{ pozitiftir})\\
&= \left|\left(a_m - L\right) - \left(a_n - L\right)\right| && (a_m - a_n \text{ ifadesine } 0 = L - L \text{ ekle})\\
&\le \left|a_m - L\right| + \left|a_n - L\right| && (|x-y| < |x| + |y|)\\
&< 1 + 1 = 2 && (n > N \text{ için } \left|a_n - L\right| \le 1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $2 < 2$ çelişkisi elde edilir. O hâlde dizi ıraksaktır. ∎

Iraksak dizilere başka bir örnek daha verelim. Genel terimi $a_n = n^2$ olan $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ dizisi ıraksaktır çünkü $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ değeri bir sayı değildir. Bu tarz durumlarda dizi sonsuza *ıraksar* denir.

Tanım 13.6 (Sonsuza ıraksama)

1. Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ise $\{a_n\}$ dizisi **sonsuza ıraksar** denir. Bunun anlamı, her $L > 0$ için $n > N$ iken $a_n > L$ olacak şekilde pozitif bir N olmasıdır.
2. Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ise $\{a_n\}$ **eksi sonsuza ıraksar** denir. Bunun anlamı, her $L < 0$ için $n > N$ iken $a_n < L$ olacak şekilde pozitif bir N olmasıdır.

Bu tanım, *sonsuza ıraksamak* adı verilen bir koşuldan bahseder. Ancak bu koşulu sağlayan bir dizinin Tanım 13.5'e göre de ıraksak olduğunu henüz ispatlamadık. Aşağıdaki 7. alıştırmada bunu yapmanız istenecektir.

Bölüm 13.7 Alıştırmaları

1. $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ dizisinin 0'a yakınsadığını ispatlayınız.

2. $\left\{5 + \frac{2}{n^2}\right\}$ dizisinin 5'e yakınsadığını ispatlayınız.

3. $\left\{\frac{2n^2+1}{3n-1}\right\}$ dizisinin sonsuza ıraksadığını ispatlayınız.

4. $\{1 - \frac{1}{2^n}\}$ dizisinin 1'e yakınsadığını ispatlayınız.

5. $\{\frac{2n+1}{3n-1}\}$ dizisinin $\frac{2}{3}$'e yakınsadığını ispatlayınız.

6. $\left\{\frac{5n^2+n+1}{4n^2+2}\right\}$ dizisinin $\frac{5}{4}$'e yakınsadığını ispatlayınız.

7. Sonsuza ıraksayan bir dizinin ıraksak olduğunu ispatlayınız.

8. Her $c \in \mathbb{R}$ için $c, c, c, c, \ldots$ **sabit dizisi** c sayısına yakınsar. İspatlayınız.

9. Eğer $\{a_n\}$ dizisi L'ye yakınsak ve $c \in \mathbb{R}$ ise $\{ca_n\}$ dizisi cL'ye yakınsar. İspatlayınız.

10. Eğer $\{a_n\}$ dizisi L sayısına ve $\{b_n\}$ dizisi M sayısına yakınsıyor ise $\{a_n + b_n\}$ dizisinin $L + M$ sayısına yakınsadığını ispatlayınız.

11. Eğer $\{a_n\}$ dizisi L sayısına ve $\{b_n\}$ dizisi M sayısına yakınsıyor ise $\{a_n b_n\}$ dizisinin LM sayısına yakınsadığını ispatlayınız.

12. Eğer $\{a_n\}$ dizisi L sayısına ve $\{b_n\}$ dizisi $M \neq 0$ sayısına yakınsak ise $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ dizisinin $\frac{L}{M}$ sayısına yakınsadığını ispatlayınız. (Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ kabul edilebilir.)

13. Her $\{a_n\}$ dizisine karşılık bir $\{|a_n|\}$ dizisi vardır. Eğer $\{|a_n|\}$ dizisi 0'a yakınsak ise $\{a_n\}$ dizisinin de 0'a yakınsak olduğunu ispatlayınız. Ayrıca $\{|a_n|\}$ dizisi bir $L \neq 0$ sayısına yakınsak fakat $\{a_n\}$ ıraksak olacak şekilde bir örnek veriniz.

14. Yeterince büyük n sayıları için $a_n \leq b_n \leq c_n$ şartını sağlayan $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ verilsin. (Yani $n > M$ iken $a_n \leq b_n \leq c_n$ olacak şekilde bir M tamsayısı var olsun.) Eğer $\{a_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri L'ye yakınsıyor ise $\{b_n\}$ de L'ye yakınsar. İspatlayınız.

13.8 Seriler

Analizden bildiğiniz üzere *diziler* ve *seriler* arasında büyük bir fark vardır.

Dizi; $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots$ biçimindeki sonsuz bir listedir.

Seri; $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots$ biçimindeki sonsuz bir *toplamdır.*

Hatırlanacağı üzere $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,\ldots$ dizisi $\{a_n\}$ ile gösterilir. Bir seriyi göstermek için ise aşağıdaki toplam (sigma) sembolü kullanılır:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ = \ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots.$$

Örneğin,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ = \ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

Bu toplamın tahminen 1 olduğunu söylenebilir. Fakat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} \ = \ \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\cdots$$

sonsuz toplamının her bir kesri 1'den büyük olduğu için bu toplamın ∞ olduğu görülebilir.

Seriler analiz için önemlidir çünkü karmaşık fonksiyonlar serilerle ifade edilebilir. Üstelik bu serilerin terimleri, basit cebirsel işlemlerle elde edilir. Analiz derslerinden bildiğiniz üzere fonksiyonlar aşağıdaki kosinüs örneğide olduğu gibi *Maclaurin serisine* açılabilir.

$$\cos(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \ = \ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots.$$

Seriler konusunda herhangi bir ilerleme kaydetmeden önce, sonsuz sayıda sayıyı toplamanın ne demek olduğunu açıkça belirtmek gerekir. Bunun bir anlam ifade ettiği ve etmediği durumları anlamak gerekir. Bir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ = \ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+\cdots$$

serisinin toplamının sonlu olup olmadığını belirlemenin yolu, seriyi $n-$yinci terimde sonlandırmaktır:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \ = \ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_n.$$

Serinin $n-$yinci **kısmi toplamı** denen bu toplam s_n ile gösterilir.

Her bir n pozitif tamsayısına karşılık, serinin bir s_n kısmi toplamı vardır:

$$\begin{array}{lcl} s_1 &=& a_1 \\ s_2 &=& a_1+a_2 \\ s_3 &=& a_1+a_2+a_3 \\ s_4 &=& a_1+a_2+a_3+a_4 \\ s_5 &=& a_1+a_2+a_3+a_4+a_2 \\ \vdots && \\ s_n &=& a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \vdots && \end{array}$$

Eğer $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sonsuz toplamı bir anlam ifade edecekse $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ kısmi toplamı, yeterince büyük n değerleri için S'ye yaklaşık bir değer vermelidir. Üstelik n büyüdükçe s_n toplamı S sayısına daha da çok yaklaşmalıdır. Bir başka deyişle $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots$ *kısmi toplamlar dizisi* S sayısına yakınsamalıdır. Ana tanım, bu gözleme dayanır. Eğer sonsuz bir seriye ait kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise o serinin kendisi de *yakınsaktır* denir.

Tanım 13.7 Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi bir S sayısına yakınsıyorsa serinin kendisi de S'ye **yakınsıyor** denir ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ yazılır.

Eğer $\{s_n\}$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de **ıraksaktır**. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ifadesi sonlu olmadığı için bir anlam ifade etmez.

Örnek 13.10 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Serinin $n-$yinci kısmi toplamı $s_n = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ile verilir. Dikkat edilirse $s_n = 2s_n - s_n$ yazılabilir. Şimdi, s_n için daha kullanışlı bir formül bulmak amacıyla bu eşitliği açalım ve benzer terimleri sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} s_n = 2s_n - s_n &= 2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right) \\ &= \left(\frac{2}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right) = 1-\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Yani $s_n = 1-\frac{1}{2^n}$ olur. Alıştırma 13.7.4 gereğince $\{s_n\} = \{1-\frac{1}{2^n}\}$ ile verilen kısmi toplamlar dizisi 1'e yakınsar. Tanım 13.7'den $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ elde edilir. ■

Önceki örneğe rağmen bir dizinin veya bir serinin belirli bir sayıya yakınsadığını göstermek için Tanım 13.5 ve Tanım 13.7 pratikte nadiren kullanılır. Bunların yerine, standart bir analiz dersinde verilen yakınsama testlerini kullanma eğilimi daha yaygındır. Bu testlere örnek olarak *karşılaştırma testi, oran testi, kök testi* ve *alterne seri testi* verilebilir. Bu testleri ve teknikleri nasıl kullanacağınızı analiz dersinde öğrendiniz. Ancak onların neden geçerli olduğunu *ispatlamamış* olabilirsiniz. Bunu vurgulamamızın sebebi, Tanım 13.5 ve Tanım 13.7'nin bahsedilen testleri ispatlamak için kullanılmasıdır. Bu noktanın altını çizmek için birkaç yakınsama testini alıştırmalar kısmında ispatlamanız istenecektir.

Örnek olarak, ıraksaklık testini elde etmemizi sağlayan bir teoremin ispatı ile bu bölümü kapatalım.

Teorem 13.11 Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\{a_n\}$ dizisi 0'a yakınsar.

İspat. Doğrudan ispat yapalım. Kabul edelim ki $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olsun. Bu serinin toplamına S diyelim. Tanım 13.7'ye göre $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi S'ye yakınsar. Tanım 13.5'den, her $\varepsilon > 0$ için $n > N$ olduğunda $|s_n - S| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $n-1 > N$ olduğunda $|s_{n-1} - S| < \varepsilon$ olur.

Şimdi, $\{a_n\}$ dizisinin 0'a yakınsadığını göstermek için $\varepsilon > 0$ seçelim. Önceki paragrafa göre $n > N'$ iken $|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $|s_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N' \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n > 2$ için $a_n = s_n - s_{n-1}$ yazılabilir. O hâlde $n > N'$ iken

$$\begin{aligned} |a_n - 0| = |s_n - s_{n-1}| &= |(s_n - S) - (s_{n-1} - S)| \\ &\leq |s_n - S| + |s_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, Tanım 13.5 gereğince, $\{a_n\}$ dizisi 0'a yakınsar. ■

Bu teoremin karşıt tersi, kullanışlı bir ıraksaklık testi verir.

Sonuç 13.1 (Iraksaklık testi) Eğer $\{a_n\}$ ıraksak ya da sıfırdan farklı bir sayıya yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örneğin, ıraksaklık testine göre $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ serisi ıraksaktır çünkü $\{1 - \frac{1}{n}\}$ dizisi 1'e yakınsar. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k}$ serisi de ıraksaktır çünkü $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}\right\}$ dizisi ıraksaktır. (Bkz: Alıştırma 13.9, s. 263.)

Iraksaklık testi sadece serilerin ıraksak olduğunu göstermek için kullanılabilir. Yakınsaklık hakkında hiçbir bilgi vermez. Eğer $\{a_n\}$ dizisi 0'a yakınsıyor ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak olabilir veya olmayabilir. Bu, serinin kendisine bağlıdır. Teorem 13.11 gereğince $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\{a_n\}$ dizisi kesinlikle 0'a yakınsar. Ancak $\{a_n\}$ dizisinin 0'a yakınsaması, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olacağı anlamına gelmez. Bunun bir örneği

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

ile verilen **Harmonik seridir**. Ünite 10'daki Alıştırma 21'e göre bu serinin ilk 2^n tane terimin kısmi toplamı

$$s_{2^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

koşulunu sağlar. Üstelik n arttıkça $1+\frac{n}{2}$ sınırlanamaz bir şekilde büyür. Yani kısmi toplamlar dizisi ıraksaktır. Sonuç olarak harmonik seri ıraksaktır.

Bölüm 13.8 Alıştırmaları

Tanım 13.7'yi (ve gerekirse de Tanım 13.5'i) kullanarak aşağıdaki sonuçları ispatlayınız. Bunların çözümleri, kapsamlı bir analiz kitabında bulunabileceği için kitabın sonuna dahil edilmemiştir. Aşağıda, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ifadesi kısaca $\sum a_k$ olarak yazılmıştır.

1. *Geometrik seri,* $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ formundaki bir seriye denir. Burada a ve r birer reel sayıdır. (Toplamın ilk terimi a'dır ve $k-$yıncı terimi ise önceki terimin r katıdır.) Eğer $|r| < 1$ ise serinin $\frac{a}{1-r}$ sayısına yakınsadığını ispatlayınız. Ayrıca, $a \neq 0$ ve $|r| \geq 1$ ise seri ıraksaktır. (Eğer yardıma ihtiyacınız olursa $a = r = \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayan geometrik seri hakkındaki Örnek 13.10'a bakabilirsiniz.)

2. *Karşılaştırma testini* ispatlayınız: Kabul edelim ki $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ iki seri olsun. Her k için $0 \leq a_k \leq b_k$ olmak üzere $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ da yakınsaktır. Ayrıca, her k için $0 \leq b_k \leq a_k$ olmak üzere $\sum b_k$ ıraksak ise $\sum a_k$ da ıraksaktır.

3. *Limit karşılaştırma testini* ispatlayınız: Her k için $a_k, b_k > 0$ olacak şekilde $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serileri verilsin. Eğer $\sum b_k$ yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ ise $\sum a_k$ da yakınsaktır. (İspat için yukarıdaki alıştırmaların herhangi birini kullanabilirsiniz.)

4. *Mutlak yakınsaklık testini* ispatlayınız: Bir $\sum a_k$ serisini ele alalım. Eğer $\sum |a_k|$ yakınsak ise $\sum a_k$ da yakınsaktır. (İspat için yukarıdaki alıştırmaların herhangi birini kullanabilirsiniz.)

5. *Oran testini* ispatlayınız: Her k için a_k pozitif olmak üzere $\sum a_k$ serisi verilsin. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L < 1$ ise $\sum a_k$ serisi yakınsaktır. Fakat $L > 1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır. (İspat için yukarıdaki alıştırmaların herhangi birini kullanabilirsiniz.)

ÜNİTE 14

Kardinalite

Bu ünite, kümelerin kardinalitesine ayrılmıştır. İlk bakışta bu konu çok basit görünür. Bir kümenin kalitesini bulmak için onun elemanlarını saymak gerekir. Örneğin, $A = \{a, b, c, d\}$ ise $|A| = 4$ ve $B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 \leq n \leq 5\}$ ise $|B| = 11$'dir. Bu durumda $|A| < |B|$ olur. Bundan daha basit ne olabilir ki?

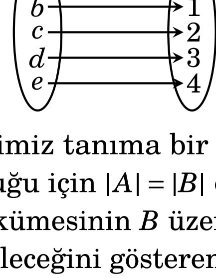
Aslında, sonsuz kümelerdeki kardinalite kavramı oldukça karmaşıktır. Bu ünitenin ana teması, çok sayıda farklı sonsuzluk türleri olduğunu ve bazı sonsuzlukların diğerlerinden daha büyük olduğunu açıklamaktır. Her ikisi de sonsuz kardinaliteye sahip A ve B kümeleri için $|A| < |B|$ olabilir.

14.1 Eşit Kardinaliteli Kümeler

İki kümenin aynı kardinaliteye sahip olmasının ne anlama geldiğini tartışarak işe başlayalım. Bu noktaya kadar, A ve B kümelerinin aynı sayıda elemanı olması halinde $|A| = |B|$ olduğunu söyledik. Buna göre A ve B kümelerinin elemanları sayılır. Eğer aynı sayı elde edilirse $|A| = |B|$ olur.

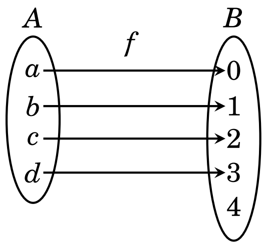
Bu strateji, sonlu (ve çok büyük olmayan!) kümelerde işe yarar ancak sonsuz kümelerde işe yaramaz. Çünkü sonsuz kümelerin elemanları saymakla bitmez. Bu nedenle hem sonlu hem de sonsuz kümelerde kullanılabilecek yeni bir yaklaşıma ihtiyaç duyarız. Bu yaklaşım aşağıda verilmiştir:

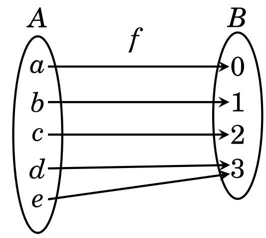
Tanım 14.1 Eşleme olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonu var ise A ve B kümeleri **aynı kardinalitelidir** denir ve $|A| = |B|$ yazılır. Eğer böyle bir eşleme yoksa bu kümelerin **kardinaliteleri farklıdır** ve $|A| \neq |B|$ yazılır.



Yukarıdaki şekil, verdiğimiz tanıma bir örnektir. Birebir ve örten bir $f : A \to B$ fonksiyonu var olduğu için $|A| = |B|$ olur. Bu fonksiyon, A ve B kümelerini eşleştirir. Bunu, A kümesinin B üzerine mükemmel bir uyum sağlayacak şekilde yerleştirilebileceğini gösteren yöntem olarak düşünebiliriz.

Eğer A ve B kümeleri aşağıdaki şekillerin herhangi birinde gösterildiği gibi ise bir $f : A \to B$ eşlemesi yoktur. (Elimizden gelenin en iyisi, ya birebir ya da örten ancak her ikisi birden olmayan bir fonksiyondur.) Kardinalite tanımı böyle durumlarda $|A| \neq |B|$ olduğunu söyler.





Örnek 14.1 $A = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 5\}$ ve $B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 \leq n \leq 0\}$ aynı kardinalitelidir çünkü $f(n) = -n$ olarak tanımlı $f : A \to B$ fonksiyonu bir eşlemedir.

Sırasıyla şu yorumları yapabiliriz. Birincisi, $|A| = |B|$ ise A kümesinden B kümesine *birçok* eşleme olabilir. Ancak $|A| = |B|$ sonucunu çıkarmak için bunlardan sadece bir tanesini bulmak yeterlidir. İkincisi, eşlemeler burada çok büyük bir rol oynar. Eşlemelere **bijeksiyon** da denir. Bu bağlamda Örnek 14.1'deki $f(n) = -n$ fonksiyonu bir bijeksiyondur. Ayrıca birebir fonksiyonlara **injeksiyon**, örten fonksiyonlara da **surjeksiyon** denir.

Tekrar vurgulayalım: Tanım 14.1 hem sonlu hem de sonsuz kümeler için geçerlidir. A ve B kümeleri sonsuz olduğunda bir $f : A \to B$ eşlemesi var ise $|A| = |B|$ olur. Böyle bir eşleme yok ise $|A| \neq |B|$ olur.

Örnek 14.2 Aşağıdaki tablo ile tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir eşlemedir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\ldots$
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	$\ldots$

Bu nedenle $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olur. Şimdi bunun neden doğru olduğuna bakalım. Dikkat edilirse f hem birebir hem de örten olacak şekilde tanımlanmıştır. Her tamsayı, sonsuz uzunluktaki ikinci satırda sadece bir kez kullanılmıştır. Bu tabloya göre, herhangi bir $b \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = b$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. O hâlde f örtendir. Tablonun oluşturuma şekli, $m \neq n$ olduğunda $f(m) \neq f(n)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla f birebirdir. Sonuç olarak $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bir eşlemedir. Tanım 14.1 gereğince $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olmalıdır.

Örnek 14.2 kafanızı biraz karıştırabilir. Bir taraftan, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ sonsuz oldukları için $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ifadesi anlamlıdır çünkü bunların her ikisinin kardinalitesi de "sonsuz"dur. Öte taraftan, $\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin iki katıymış gibi görünür çünkü $\mathbb{Z}$ kümesi pozitiflerin yanı sıra tüm negatif tamsayıları da içerir. Tanım 14.1 bu belirsizliğe son verir çünkü $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerini eşleştirdiği için $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$ olur. Bunu bir teorem ile özetleyelim.

Teorem 14.1 Birebir ve örten yani eşleme olacak şekilde bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonu vardır. Bu nedenle $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$ olur.

Doğal sayılar ve tamsayılar kümeleri aynı kardinalitelidir. Bu gözlem, bizi diğer sonsuz kümelerin kardinalitelerini karşılaştırmaya teşvik eder. Örneğin, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ nasıl karşılaştırılır? Şimdi dikkatimizi buna verelim.

Aslında $|\mathbb{N}|\neq|\mathbb{R}|$'dir. Bu gözlem, ilk olarak Georg Cantor (1845-1918) tarafından yapılmıştır. Cantor, zekice bir yöntem kullanarak örten olacak şekilde bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu olmadığını göstermiştir. (Buna göre bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ eşlemesi yoktur ve Tanım 14.1 gereğince $|\mathbb{N}|\neq|\mathbb{R}|$ olmalıdır.)

Şimdi, örten bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun neden olamayacağını gösteren Cantor'un yöntemini açıklayalım. Tam bir ispat yazmak yerine bunu gayriresmi bir şekilde yapalım. Rastgele bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. İşte f fonksiyonunun neden örten olamayacağının sebebi.

Bu fonksiyon için bir tablo oluşturup sol tarafa $n\in\mathbb{N}$ değerlerini, sağ tarafa da $f(n)$ değerlerini yazdığımızı hayal edelim. Böyle bir tablonun ilk bir kaç satırı aşağıdakine benzer. Bu tabloda, $f(n)$ reel sayısının tüm ondalık basamakları sağ tarafa açılacak şekilde yazılmıştır. Buna göre örneğin, $f(1)$ sayısının değeri $0,4$ olsa bile bu sayı $0,40000000\ldots$ olarak yazılmıştır.

n	$f(n)$
1	0 , 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
2	8 , 5 0 0 6 0 7 0 8 6 6 6 9 0 0 ...
3	7 , 5 0 5 0 0 9 4 0 0 4 4 1 0 1 ...
4	5 , 5 0 7 0 4 0 0 8 0 4 8 0 5 0 ...
5	6 , 9 0 0 2 6 0 0 0 0 0 0 5 0 6 ...
6	6 , 8 2 8 0 9 5 8 2 0 5 0 0 2 0 ...
7	6 , 5 0 5 0 5 5 5 0 6 5 5 8 0 8 ...
8	8 , 7 2 0 8 0 6 4 0 0 0 0 4 4 8 ...
9	0 , 5 5 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 7 7 ...
10	0 , 5 0 0 2 0 7 2 2 0 7 8 0 5 1 ...
11	2 , 9 0 0 0 0 8 8 0 0 0 0 9 0 0 ...
12	6 , 5 0 2 8 0 0 0 8 0 0 9 6 7 1 ...
13	8 , 8 9 0 0 8 0 2 4 0 0 8 0 5 0 ...
14	8 , 5 0 0 0 8 7 4 2 0 8 0 2 2 6 ...
⋮	⋮

Tablo üzerinde gri renk ile boyanmış köşegenin üzerinde bulunan $n-$yinci bileşen, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamıdır:

Birinci bileşen, $f(1)$'in onda birler basamağındaki rakamıdır.
İkinci bileşen, $f(2)$'nin yüzde birler basamağındaki rakamıdır.
Üçüncü bileşen, $f(3)$'ün binde birler basamağındaki rakamıdır.
Dördüncü bileşen, $f(4)$'ün on binde birler basamağındaki rakamıdır.

Bu köşegeni, hiçbir $f(n)$ sayısına eşit olmayan bir $b \in \mathbb{R}$ oluşturmak için kullanabiliriz. Bunun için b sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamını, köşegen üzerindeki $n-$yinci bileşenden farklı seçmek yeteridir. Böylece b ve $f(n)$ sayılarının virgülden sonraki $n-$yinci rakamları farklı olur. Daha belirgin olması için, b tamsayısını 1'den küçük olmak koşulu ile şöyle tanımlayalım: Eğer $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0'dan farklı ise b'nin virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0 olsun. Ancak $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0 ise b'nin virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 1 olsun. Böylece, yukarıdaki tabloda verilen f fonksiyonuna karşılık

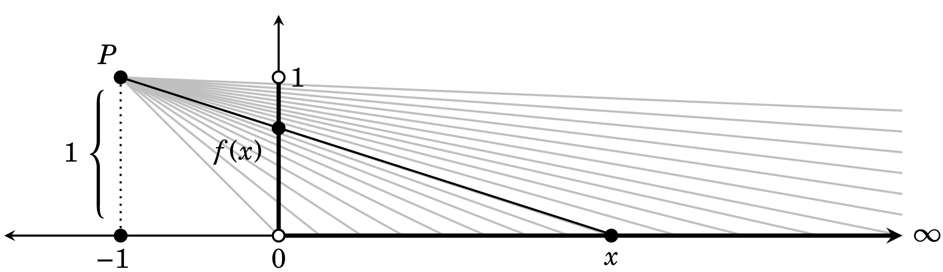
$$b = 0,01010001001000\ldots$$

olur. O hâlde her $n \in \mathbb{N}$ için b ve $f(n)$ sayılarının virgülden sonraki $n-$yinci rakamları farklıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) \neq b$ olduğundan f örten değildir.

Bu fikir (sadece yukarıdaki örnekteki değil) *her* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna uygulanabilir. O hâlde birebir ve örten bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yoktur. Tanım 14.1 gereğince $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur. Şimdi bunu bir teoremle özetleyelim.

Teorem 14.2 Birebir ve örten yani eşleme olacak şekilde bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yoktur. Bu nedenle $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur.

Bu teorem, sonsuzlukların farklı türde olabileceğinin ilk göstergesidir. Hem $\mathbb{N}$ hem de $\mathbb{R}$ sonsuzdur fakat $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur. Bu bölüm boyunca bu temayı geliştirmeye devam edeceğiz. Bir sonraki örnek, $\mathbb{R}$ üzerindeki $(0,\infty)$ ve $(0,1)$ aralıklarının aynı kardinaliteye sahip olduğunu gösterir.



Şekil 14.1: Bir $f : (0,\infty) \to (0,1)$ eşlemesi. P noktasında bir ışık kaynağı olduğu düşünülürse $f(x)$ değeri, gölgesi x olan $y-$ekseni üzerindeki noktadır.

Örnek 14.3 $|(0,\infty)| = |(0,1)|$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşitliği doğrulamak için bir $f:(0,\infty) \to (0,1)$ eşlemesi bulmak gerekir. Bu fonksiyonu geometrik olarak tanımlayalım: $(0,\infty)$ aralığını $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki pozitif $x-$ekseni olarak düşünelim. Şekil 14.1'de gösterildiği gibi $(0,1)$ aralığı $y-$ekseni üzerindedir. Böylece $(0,\infty)$ ve $(0,1)$ aralıkları birbirine diktir.

Şekilde ayrıca $P = (-1,1)$ noktası gösterilmiştir. Şimdi $f(x)$ değerini, P noktasından $x \in (0,\infty)$ noktasına çizilen doğrunun $y-$eksenini $(0,1)$ aralığı üzerinde kestiği nokta olarak tanımlayalım. Üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{1}{x+1} = \frac{f(x)}{x} \quad \text{ve böylece} \quad f(x) = \frac{x}{x+1}$$

yazılabilir. Eğer $f:(0,\infty) \to (0,1)$ fonksiyonunun bir eşleme olduğu şekilden görünmüyorsa Bölüm 12.2'de verilen yöntemleri kullanarak bunu ispatlayabilirsiniz. (Bkz: Aşağıdaki 16. alıştırma.)

Aynı kardinaliteli olmak, kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır yani yansıyan, simetrik ve geçişmelidir. Şimdi bunu doğrulayalım. Bir A kümesi verilsin. $A \to A$ özdeşlik fonksiyonu bir eşleme olduğu için $|A| = |A|$ olur. (Bu, yansıma özelliğidir.) Eğer $|A| = |B|$ ise bir $f : A \to B$ eşlemesi vardır. Buna göre $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu da bir eşlemedir. Böylece $|B| = |A|$ olur. (Bu da simetri özelliğidir.) Geçişme özelliği için $|A| = |B|$ ve $|B| = |C|$ olduğunu kabul edersek $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ eşlemeleri vardır. Teorem 12.2 gereğince $g \circ f : A \to C$ fonksiyonu da bir eşlemedir. Böylece $|A| = |C|$ olur.

Geçişme özelliği kullanışlı olabilir. Herhangi iki A ve C kümelerinin aynı kardinaliteye sahip olduğunu göstermeye çalışırken, $|A| = |B|$ ve $|B| = |C|$ olacak şekilde üçüncü bir küme üretebiliriz. Bu durumda geçişme özelliği $|A| = |C|$ olduğunu garanti eder. Aşağıdaki örnek buna dayanır.

Örnek 14.4 $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ olduğunu gösteriniz.

Dikkat edilirse $g(x) = 2^x$ ile tanımlı $g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ fonksiyonu bir eşlemedir. Buradan $|\mathbb{R}| = |(0,\infty)|$ bulunur. Ayrıca Örnek 14.3, $|(0,\infty)| = |(0,1)|$ olduğunu gösterir. Böylece $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ elde edilir.

Bu bölümde şu ana kadar, aralarında bir eşleme olan kümelerin "aynı kardinaliteli" olduklarını beyan ettik. Aralarında bir eşleme bulunmayan kümeler "farklı kardinalitelidir." Buna göre $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}| = |(0,\infty)| = |(0,1)|$ olduğunu gösterdik. Dolayısıyla iki kümenin aynı ya da farklı kardinaliteli olduğunu belirleyecek bir yönteme sahibiz. Ancak kardinalitenin *ne* olduğunu söylemekten özellikle kaçındık. Örneğin, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ dediğimizde $|\mathbb{Z}|$ veya $|\mathbb{N}|$ tam olarak *neyi* ifade eder? Bunların eşit oldukları şey *nedir?* Cevap bir sayı değildir çünkü bunlar çok büyüktür. Üstelik, cevabın "sonsuz" olduğunu söylemek de çok doğru değildir çünkü bildiğimiz üzere farklı sonsuzluk türleri vardır. O hâlde $|\mathbb{Z}|$ ne tür bir matematiksel varlıktır? Genellersek, bir X kümesinin kardinalitesi olan $|X|$ ifadesi tam olarak *nedir?*

Bu aslında bir sayının ne olduğunu sormaya benzer. Bir sayı, örneğin 5, fiziksel değil soyut bir kavramdır. Hayatımızın ilk evresinde bazı şeyleri içgüdüsel olarak gruplandırdık (beş elma, beş portakal, vb.) ve 5 sayısının bu kümelerin hepsinde ortak olduğunu düşündük. En gerçek anlamda, 5 sayısı bu kümelerin birebir ve örten bir fonksiyonla eşlenebileceğin göstergesidir. Bir başka deyişle *"aynı kardinaliteye sahip olma"* bağıntısı altında, kümelerin belirli bir denklik sınıfı 5 ile özdeşlenebilir. (Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu hatırlayın.) Bunu kavramak kolaydır çünkü sayısal nicelikleri kavrama yeteneği doğuştan gelir. Bir X kümesinin kardinalitesinin, birebir ve örten bir fonksiyon ile X kümesine eşlenebilen bütün kümeler için ortak olduğunu söyleyebiliriz. Bunu kavramak zor olabilir ancak gerçekten de bu (sonlu) bir sayının büyüklük kavramından farklı değildir.

Aslında daha somut davranarak $|X|$ ifadesini, X ile aynı kardinaliteye sahip kümelerin denklik sınıfı olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımın avantajı, $|X|$ ifadesine açıkça bir anlam vermesidir. Ancak sezgisel olarak yaklaşıp, X kümesinin "büyüklüğünün" ölçüsünü $|X|$ olarak yorumlamanın herhangi bir zararı yoktur. Bu bölümün amacı, iki kümenin aynı büyüklüğe mi yoksa farklı büyüklüklere mi sahip olduğuna karar verebilmektir.

Bölüm 14.1 Alıştırmaları

A. Aşağıdaki kümelerin aynı kardinaliteli olduklarını, birinden diğerine bir eşleme tanımlayarak gösteriniz. Bu fonksiyonu (tablo ile değil) bir kural olarak veriniz.

1. $\mathbb{R}$ ve $(0,\infty)$

2. $\mathbb{R}$ ve $(\sqrt{2},\infty)$

3. $\mathbb{R}$ ve $(0,1)$

4. Tek tamsayılar kümesi ve çift tamsayılar kümesi

5. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{7k : k \in \mathbb{Z}\}$

6. $\mathbb{N}$ ve $S = \{\frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

7. $\mathbb{Z}$ ve $S = \{\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16\ldots\}$

8. $\mathbb{Z}$ ve $S = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 1\}$

9. $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$

10. $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$

11. $[0,1]$ ve $(0,1)$

12. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ (Yol gösterme: Bölüm 12.2'nin 18. alıştırmasını kullanabilirsiniz.)

13. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ve $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ (Yol gösterme: Yukarıdaki 12. alıştırmayı kullanabilirsiniz.)

14. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \leq m\}$

B. Bu bölümde verilen eşlemelerle ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

15. Örnek 14.2'deki (sayfa 270) birebir ve örten f fonksiyonunun kuralını bulunuz.

16. Örnek 14.3'te verilen f fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

14.2 Sayılabilir ve Sayılamaz Kümeler

Bir önceki bölümün ana hatlarını özetleyerek başlayalım.

1. $|A| = |B|$'dir ancak ve ancak bir $f : A \to B$ eşlemesi vardır.
2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olur çünkü bir $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ eşlemesi vardır.
3. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur çünkü bir $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eşlemesi *yoktur*.

Sonuç olarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri sonsuzdur ancak bunların hepsi aynı kardinaliteli değildir. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinin kardinaliteleri aynıdır ama $\mathbb{R}$'nin kardinalitesi diğer ikisinden farklıdır. Bu durum, sonsuz kümelerin farklı büyüklüklere sahip olabileceği anlamına gelir. Şimdi bu olgu için kullanacağımız kelime ve sembollerle ilgili birkaç tanım yapalım.

Bir anlamda, $\mathbb{N}$'nin elemanları sayılabilir. Bir başka deyişle bunlar $1, 2, 3, 4, \ldots$ şekline sayılabilir ama kümenin tamamını saymak için bu süreci sonsuza dek sürdürmek gerekir. Buna göre $\mathbb{N}$ kümesine *sayılabililir sonsuz küme* denir. Bu terim, kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile aynı olan kümeler için de kullanılır.

Tanım 14.2 Bir A kümesi verilsin. Eğer $|\mathbb{N}| = |A|$ yani bir $\mathbb{N} \to A$ eşlemesi var ise A **sayılabilir sonsuz** bir kümedir. Sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir kümeye **sayılabilir** küme denir. Eğer A sonsuz ve $|\mathbb{N}| \neq |A|$ yani eşleme olacak şekilde bir $\mathbb{N} \to A$ *yok* ise A **sayılamaz** bir kümedir.

O hâlde $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuzdur. $\mathbb{R}$ ise sayılamaz. Bu bölüm sayılabilir sonsuz kümelerle ilgilidir. Sayılamaz kümeler daha sonra ele alınacaktır.

Eğer A sayılabilir sonsuz ise $|\mathbb{N}| = |A|$ olduğu için bir $f : \mathbb{N} \to A$ eşlemesi vardır. Bu fonksiyon, A kümesinin elemanlarını bir anlamda "sayar." A kümesinin ilk elemanı $f(1)$, ikinci elemanı $f(2)$, üçüncü elemanı $f(3)$ vb. olur. Sayılabilir sonsuz kümeler, en küçük sonsuz kümeler olarak düşünülebilir çünkü sayma işlemi bittiği an küme sonsuz değil sonlu olur. Böylece sayılabilir sonsuz kümeler, sonsuz olup da en az elemana sahip kümelerdir. Sayılabilir sonsuz kümelerin kardinalitesi $\aleph_0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 14.3 Doğal sayılar kümesinin kardinalitesi $\aleph_0$ ile gösterilir ve $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ yazılır. O hâlde sayılabilir sonsuz bir kümenin kardinalitesi $\aleph_0$'dır.

($\aleph$ simgesi, İbranice alfabesinin ilk harfidir ve "alef" diye telaffuz edilir. Buna göre $\aleph_0$ sembolü "alef sıfır" diye okunur.) Bu bölümün başında verilen bilgiler ışığında $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ ve $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$ olur.

Örnek 14.5 $Ç = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ çift tamsayılar kümesi verilsin. Dikkat edilirse $f(n) = 2n$ ile tanımlı $f : \mathbb{Z} \to Ç$ fonksiyonu bir eşlemedir. Buradan $|\mathbb{Z}| = |Ç|$ bulunur. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |Ç|$ olduğu için $Ç$ sayılabilir sonsuzdur ve $|Ç| = \aleph_0$ olur.

İşte önemli bir gözlem: Sayılabilir sonsuz bir A kümesinin elemanları, uzunluğu sonsuz olan bir $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ listesi şeklide yazılabilir. Bu liste, A kümesinin a_1 elemanı ile başlar ve bütün elemanlarını içerir. Örneğin, yukarıda verilen $Ç$ kümesi $0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8, \ldots$ şeklinde listelenebilir. Bunun yapılabilme sebebi şudur: A sayılabilir sonsuz olduğu için Tanım 14.2 gereğince bir $f : \mathbb{N} \to A$ eşlemesi vardır. Bu eşleme, A kümesinin elemanlarının $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ şeklinde listelenmesine olanak verir. Karşıt olarak, A kümesinin elemanları $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şeklinde listelenebilirse $f(n) = a_n$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{N} \to Ç$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bu nedenle A kümesi sayılabilir sonsuzdur. Bunu şu şekilde özetleyebiliriz.

Teorem 14.3 Bir A kümesi sayılabilir sonsuzdur ancak ve ancak A kümesinin elemanları sonsuz bir $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ listesi şeklinde yazılabilir.

Bu teoremin nasıl kullanılacağına dair bir örnek verelim. P ile gösterilen asal sayılar kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanları $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ şeklinde listelenebilir. O hâlde P kümesi sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 14.3'ün başka bir sonucu da şu şekilde yorumlanabilir: $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuz olmadığı için onun bütün elemanlarını sonsuz bir liste halinde yazmak imkânsızdır. (Nihayetinde bunu 271. sayfadaki tabloda yapmak istedik fakat başarısız olduk!)

Burada şu soru akla gelir: Rasyonel sayıların hepsini sonsuz bir liste olarak yazmak da imkânsız mıdır? Bir başka deyişle $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz mudur yoksa sayılamaz mıdır? Eğer rasyonel sayıları reel sayı doğrusu üzerinde işaretlemeye çalışırsanız, bunlar $\mathbb{R}$'yi büyük ölçüde dolduracaktır. Elbette ki $\sqrt{2}$, π ve e gibi bazı sayılar işaretlenemez. Fakat rasyonel sayıları temsil eden noktalar baskın görünür. Buna göre $\mathbb{Q}$'nun sayılamaz olması beklenir. Ancak $\mathbb{Q}$'nun sayılabilir olması şaşırtıcı bir gerçektir. Aşağıda verilen ispat, tüm rasyonel sayıları sonsuz bir liste olarak ifade eder.

Teorem 14.4 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuzdur.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için $\mathbb{Q}$ kümesinin bir liste olarak nasıl yazılacağı gösterilmelidir. Bütün rasyonel sayıları, aşağıda gösterildiği gibi sonsuz bir dikdörtgensel dizi üzerine yerleştirerek başlayalım. Tablonun en üstündeki satır 0 ile başlar ve arttıkça işaret değiştirerek tüm tamsayıları listeler. En tepesinde k tamsayısı olan sütun, payı k olan (en sade formdaki) bütün kesirleri içerir. Örneğin en tepesinde 2 tamsayısını barındıran sütun $\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots$ vb. kesirleri içerir. Ancak $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \ldots$ vb. kesirleri içermez çünkü bunlar en sade formda değildir. Bunların sadeleştirilmiş hâlleri, en tepesinde 1 olan sütun tarafından içerilir. Bu tabloyu inceleyerek, $\mathbb{Q}$'daki bütün rasyonel sayıların burada bulunduğuna dair kendinizi ikna ediniz.

0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	⋯
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{-5}{1}$	⋯
	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	⋯
	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	⋯
	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	⋯
	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-5}{6}$	⋯
	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	⋯
	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-5}{8}$	⋯
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Şimdi $\frac{0}{1}$ sayısından başlayalım ve aşağıdaki gibi ileri geri sarmalayan sonsuz bir yol çizelim. Dikkat edilirse her rasyonel sayı bu yol üzerindedir.

0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	⋯
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{-5}{1}$	⋯
	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	⋯
	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	⋯
	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	⋯
	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-5}{6}$	⋯
	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	⋯
	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-5}{8}$	⋯
	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{-3}{11}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-4}{15}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{-5}{9}$	⋯
	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{-2}{17}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{-4}{17}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{-5}{11}$	⋯
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Böylece $\frac{0}{1}$'den başlayan yolu takip ederek bütün rasyonel sayıları içeren sonsuz bir liste yazabiliriz:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{5},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{1},\ 3,\ \frac{3}{2},\dots$$

Teorem 14.3'e göre $\mathbb{Q}$ kümesi sayılabilir. Bir başka ifade ile $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ olur. ■

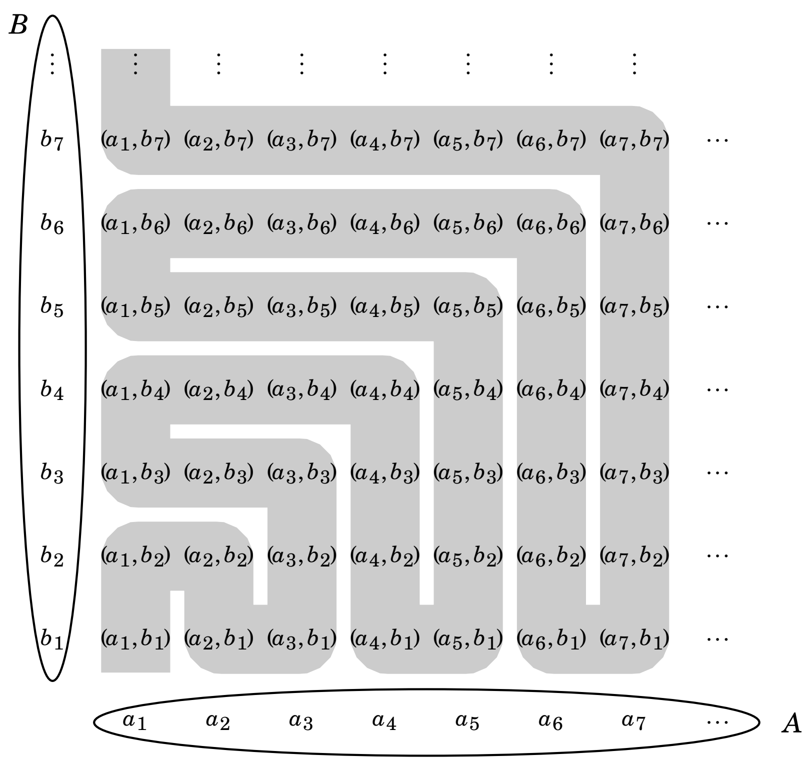
Bir sonraki teoremde belirtildiği üzere sayılabilir sonsuz iki kümenin kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 14.5 A ve B sayılabilir sonsuz ise $A \times B$ de sayılabilir sonsuzdur.

İspat. Kabul edelim ki A ve B sayılabilir sonsuz iki küme olsun. Teorem 14.3'e göre A ve B kümelerinin elemanları aşağıdaki gibi listelenebilir:

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}. \end{aligned}$$

Aşağıda, $A \times B$ üzerinde sonsuz bir yol sarmalının nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. Bir liste olarak yazılabildiği için $A \times B$ sayılabilir sonsuzdur. ■



Şekil 14.2: Sayılabilir sonsuz iki kümenin çarpımı da sayılabilir sonsuzdur

Bu teoreme bir örnek verelim: $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz olduğu için $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ da sayılabilir sonsuzdur.

Hatırlanacağı üzere bir teoremin ardından yapılan doğal çıkarımlar için "sonuç" kelimesi kullanılır. Teorem 14.5'in bir sonucu şudur:

Sonuç 14.1 Kabul edelim ki $n \geq 2$ olsun. Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri sayılabilir sonsuz ise $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur.

İspat. İspatı n üzerine tümevarım uygulayarak yapalım. Başlangıç adımı $n = 2$ için ispatlanmalıdır. Bir başka deyişle A_1 ve A_2 kümeleri sayılabilir sonsuz ise $A_1 \times A_2$ çarpımının da sayılabilir sonsuz olduğu gösterilmelidir. Bu iddia, Teorem 14.5'den dolayı doğrudur.

Şimdi, $k \geq 2$ olsun. Kabul edelim ki sayılabilir sonsuz kümelerin kartezyen çarpımı olan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ kümesi de sayılabilir sonsuz olsun. Buna göre $k+1$ tane sayılabilir sonsuz kümenin kartezyen çarpımı olan $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ kümesini ele alalım. Dikkat edileceği üzere

$$\begin{array}{rcl} f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} & \to & (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1} \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) & = & \big((x_1, x_2, \ldots, x_k), x_{k+1}\big) \end{array}$$

bir eşlemedir. Böylece $\left|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}\right| = \left|(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}\right|$ olur. Tümevarım hipotezine göre $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ kümesi, sayılabilir sonsuz iki kümenin çarpımıdır. Teorem 14.5 gereğince bu çarpım sayılabilir sonsuzdur. Yukarıda belirtildiği üzere $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ kümesi ile $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ aynı kardinalitelidir yani o da sayılabilir sonsuzdur. ■

Teorem 14.6 A ve B sayılabilir sonsuz ise $A \cup B$ de sayılabilir sonsuzdur.

İspat. Kabul edelim ki hem A hem de B sayılabilir sonsuz olsun. Teorem 14.3'ü kullanarak, A ve B kümelerini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \\ B & = & \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}. \end{array}$$

Bu iki kümeyi "karıştırıp" onları $A \cup B$ içinde listeleyebiliriz:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\}.$$

(Hem A hem de B kümesine ait olan bir elemanı iki kez yazmama konusunda anlaşalım.) Teorem 14.3 gereğinece $A \cup B$ de sayılabilir sonsuzdur. ■

Bölüm 14.2 Alıştırmaları

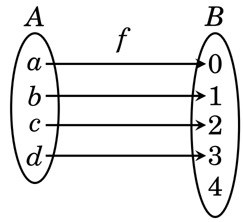
1. $A = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
2. $A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \le n\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
3. $A = \{(5n, -3n) : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
4. İrrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlayınız. (Yol gösterme: Teorem 14.4 ve Teorem 14.6'yı olmayana ergi ile birlikte kullanabilirsiniz.)
5. İspatlayın ya da çürütün: İrrasyonel sayıların, sayılabilir sonsuz bir altkümesi vardır.
6. İspatlayın ya da çürütün: Eşleme olacak şekilde bir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vardır.
7. İspatlayın ya da çürütün: $\mathbb{Q}^{100}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.
8. İspatlayın ya da çürütün: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.
9. İspatlayın ya da çürütün: $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.
10. İspatlayın ya da çürütün: $A = \left\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sayılabilir sonsuzdur.
11. $\mathbb{N}$ kümesini sekiz tane sayılabilir sonsuz altkümeye ayıran bir ayrışım bulunuz.
12. $\mathbb{N}$ kümesini $\aleph_0$ tane sayılabilir sonsuz altkümeye ayıran bir ayrışım tarif ediniz.
13. İspatlayın ya da çürütün: Eğer $A = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ sonlu}\}$ ise $A = \aleph_0$ olur.
14. Eğer $A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : n = \pi m\}$ ise $|\mathbb{N}| = |A|$ ifadesi doğru mudur?
15. Teorem 14.5, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu belirtir. Bunun alternatif bir ispatını, $\varphi(m,n) = 2^{n-1}(2m-1)$ kuralı ile tanımlanmış $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu göstererek yapınız.

14.3 Kardinalitelerin Karşılaştırılması

En az iki tane sonsuzluk türü olduğunu artık biliyoruz. Bir yanda, kardinalitesi $\aleph_0$ olan $\mathbb{N}$ gibi sayılabilir sonsuz kümeler, diğer yanda ise sayılabilir olmayan $\mathbb{R}$ kümesi bulunur. Bunların ötesinde sonsuzluk türleri var mıdır? Bu sorunun cevabı "evet"tir ancak bunun sebebini görmek için öncelikle birkaç tanım ve teorem vermek gerekir.

İlk olarak, $|A| < |B|$ ile ifade edilmek istenen tanımı verelim. A ve B sonlu olduğunda bunun anlamı açıktır: $|A| < |B|$ ifadesi, A ve B kümelerinin elemanları sayıldığında A'nın B'den daha az elemana sahip olması anlamına gelir. Ancak A veya B sonsuz ise bu yöntem işe yaramaz çünkü bunların elemanları sayılmaz.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için fonksiyonları kullanabiliriz. Dikkat edileceği üzere A ve B sonlu olduğunda, $|A| < |B|$ olması için gerek ve yeter şart birebir bir $f : A \to B$ fonksiyonun olması ancak örten hiçbir $f : A \to B$ fonksiyonun olmamasıdır. Aşağıdaki şekil bunu göresel olarak ifade eder.



Bu fikri kullanarak $|A| < |B|$ ve $|A| \leq |B|$ ile neyi kastettiğimizi tanımlayalım. Bu tanım aynı zamanda $|A| = |B|$ ifadesinin anlamını yeniden belirtir.

Tanım 14.4 A ve B iki küme olsun.

1. $|A| = |B|$ ifadesi, bir $A \to B$ eşlemesinin var olması anlamına gelir.
2. $|A| < |B|$ ifadesi, birebir olacak şekilde bir $A \to B$ olması ancak eşleme olacak şekilde bir $A \to B$ olmaması anlamına gelir.
3. $|A| \leq |B|$ ifadesi, birebir olan bir $A \to B$ olması anlamına gelir.

Örnek olarak $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerini ele alalım. Dikkat edilirse $f(n) = n$ ile tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebirdir ancak örten değildir çünkü $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık $f(n) = \frac{1}{2}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ yoktur. Asında, Teorem 14.2 de örten bir $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olmadığını söyler. Yani bir eşleme yoktur. Tanım 14.4'den

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \tag{14.1}$$

elde edilir. Bu ise $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$ olduğunu söylemenin farklı bir yoludur.

$|\mathbb{R}| < |X|$ olacak şekilde bir X var mıdır? Bunun cevabı "evet"tir. Sıradaki teorem $|\mathbb{R}| < |\mathscr{P}(\mathbb{R})|$ olduğunu söyler. (Burada $\mathscr{P}(A)$, A'nın kuvvet kümesidir.)

Teorem 14.7 Eğer A herhangi bir küme ise $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ olur.

İspat. Öncelikle, bu teoremin sonlu kümeler için doğru olduğunu belirtelim. Çünkü A sonlu ise $|A| < 2^{|A|} = |\mathscr{P}(A)|$ olur. Fakat sonlu ya da sonsuz *bütün* kümeler için ispat geçerli olmalıdır. Bu nedenle Tanım 14.4 kullanılmalıdır.

Doğrudan ispat yapalım. A herhangi bir küme olsun. Tanım 14.4'e göre, $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ olduğunu göstermek için bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$ birebir fonksiyonu olduğunu ama bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$ eşlemesi olmadığını göstermek gerekir.

Birebir olan bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$ olduğunu göstermek için $f(x) = \{x\}$ olarak tanımlayalım. Kelimelerle ifade edersek f fonksiyonu, A kümesindeki x elemanını $\mathscr{P}(A)$ kümesinin tek elemanlı $\{x\}$ kümesine götürür. Buna göre $f : A \to \mathscr{P}(A)$ birebirdir çünkü $f(x) = f(y)$ olduğu kabul edilirse $\{x\} = \{y\}$ olur. Bu kümelerinin eşit olmasının tek yolu $x = y$ olmasıdır. Yani f birebirdir.

Şimdi, bir $A \to \mathscr{P}(A)$ eşlemesinin olmadığını gösterelim. Bunu, *örten* bir $A \to \mathscr{P}(A)$ olamayacağını göstererek yapalım. Rastgele bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$

verilsin. Her $a \in A$ için $f(a) \neq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathscr{P}(A)$ üretilmelidir. Bir $x \in A$ için $f(x) \in \mathscr{P}(A)$ olduğundan $f(x) \subseteq A$ olur. O hâlde f fonksiyonu, A'nın elemanlarını A'nın altkümelerine götürür. Böylece herhangi bir $x \in A$ için ya $x \in f(x)$ ya da $x \notin f(x)$ olur. Buna göre bir $B \in \mathscr{P}(A)$ tanımlayalım:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subseteq A.$$

Rastgele bir $a \in A$ seçelim. Aşağıdaki iki durum $f(a) \neq B$ olduğunu gösterir:

1. Durum Eğer $a \notin f(a)$ ise B kümesinin tanımı gereği $a \in B$ olur. Buna göre $f(a) = B$ olması imkânsızdır çünkü bu $a \notin B$ ve $a \in B$ anlamına gelir.

2. Durum Eğer $a \in f(a)$ ise B kümesinin tanımı gereği $a \notin B$ olur. Buna göre $f(a) = B$ olması imkânsızdır çünkü bu $a \in B$ ve $a \notin B$ anlamına gelir.

Sonuçta, her $a \in A$ için $f(a) \neq B$ olduğundan f örten değildir. Bu özellik her $f : A \to \mathscr{P}(A)$ için geçerlidir. Buna göre örten ve böylece eşleme olacak şekilde bir $f : A \to \mathscr{P}(A)$ yoktur.

Özetlersek, birebir olacak şekilde $A \to \mathscr{P}(A)$ vardır ama eşleme olacak şekilde $A \to \mathscr{P}(A)$ yoktur. Tanım 14.4'e göre $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ olması gerekir. ■

Teorem 14.7 ardışık bir şekilde $A = \mathbb{N}$ kümesine uygulanırsa herbir elemanının kardinalitesi sonsuz olan aşağıdaki zincir elde edilir:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathscr{P}(\mathbb{N})| < |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))| < |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))| < \cdots \tag{14.2}$$

Sonuç olarak $\aleph_0$ ile başlayan, terimleri farklı sonsuzluk türlerinden oluşan ve artan bir sonsuz dizi vardır. Dikkat edileceği üzere $\mathbb{N}$ sayılabilir ancak $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ vb. kümelerinin hiçbiri sayılamaz.

Bir sonraki bölümde $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ olduğunu ispatlayacağız. Buna göre (14.2)'deki zincirin ilk iki elemanı $|\mathbb{N}|$ ve $|\mathbb{R}|$ olur. Bunlar, vahşi ve egzotik sonsuzluklardan oluşan uzun bir listenin evcilleştirilmiş iki sonsuzluğudur.

İleri küme teorisi veya matematiğin temelleri konusunda çalışmayı planlamadığınız sürece, $\aleph_0$ ve $|\mathbb{R}|$ ötesinde bir sonsuzluk türüne rastlamanız pek olası değildir. Ancak gelecekteki matematik derslerinde, sayılabilir sonsuz ve sayılamaz kümeleri ayırt etmeniz gerekebilir. Bu bölümü, size bu konuda yardımcı olabilecek iki teorem ile bitirelim.

Teorem 14.8 Sayılabilir sonsuz bir kümenin sonsuz her altkümesi de sayılabilir sonsuzdur.

İspat. A kümesi, sayılabilir sonsuz olan B kümesinin sonsuz bir altkümesi olsun. Sayılabilir sonsuz olduğu için B kümesinin elemanları $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ biçimindeki sonsuz bir liste olarak yazılabilir. Bu listeden, A altkümesine ait olan bütün elemanları sırayla seçerek yeni bir liste oluşturabiliriz. Buna göre A kümesi bir liste şeklinde yazılabilir. A sonsuz olduğu için yazılan liste de sonsuz olmalıdır. Sonuç olarak A sayılabilir sonsuzdur. ■

Teorem 14.9 Eğer U sayılamaz ve $U \subseteq A$ ise A kümesi de sayılamaz.

İspat. Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki U sayılmaz ve $U \subseteq A$ olsun fakat A sayılamaz olmasın. U sonsuz ve $U \subseteq A$ olduğu için A da sonsuzdur. A kümesi sonsuz olup da sayılamaz olmadığı için sayılabilir sonsuz olmalıdır. Böylece U kümesi sayılabilir sonsuz bir kümenin altkümesidir. Teorem 14.8'den dolayı U sayılabilir sonsuz olmak zorundadır. O hâlde U hem sayılabilir sonsuzdur hem de sayılamazdır. Bu bir çelişkidir. ■

Teorem 14.8 ve 14.9, bir kümenin sayılabilir sonsuz veya sayılamaz olduğunu belirlemek için kullanılabilir. Bir kümenin kardinalitesini, kardinalitesi bilinen başka bir küme ile karşılaştırarak belirlememize olanak sağlar.

Örneğin, $A = \mathbb{R}^2$ kümesinin sayılamaz olup olmadığını belirlemek isteyelim. $U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ile temsil edilen $x-$ekseni, $\mathbb{R}$ ile aynı kardinaliteye sahip olduğu için sayılamazdır. Teorem 14.9, $\mathbb{R}^2$'nin de sayılamayacağını söyler. Başka örnekler aşağıdaki alıştırmalara bulunabilir.

Bölüm 14.3 Alıştırmaları

1. A herhangi bir küme ve B sayılamaz bir küme olsun. Örten olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonu var ise A kümesinin kardinalitesi hakkında ne söylenebilir?
2. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlayınız.
3. İspatlayın ya da çürütün: Eğer A sayılamaz ise $|A| = |\mathbb{R}|$ olmalıdır.
4. İspatlayın ya da çürütün: Kabul edelim ki $A \subseteq B \subseteq C$ olsun. Eğer A ve C sayılabilir sonsuz ise B de sayılabilir sonsuzdur.
5. İspatlayın ya da çürütün: $\{0,1\} \times \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.
6. İspatlayın ya da çürütün: Her sonsuz küme, sayılabilir sonsuz bir kümenin altkümesidir.
7. İspatlayın ya da çürütün: Eğer A sayılabilir sonsuz, B sayılamaz ve $A \subseteq B$ ise $B - A$ sayılamazdır.
8. İspatlayın ya da çürütün: Tamsayıların $\{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : a_i \in \mathbb{Z}\}$ ile verilen sonsuz dizisi sayılabilir sonsuzdur.
9. Eğer A ve B sonlu iki küme ve $|A| = |B|$ ise birebir olan her $f : A \to B$ fonksiyonunun aynı zamanda örten olduğunu ispatlayınız. Eğer A ve B sonlu değil ise bunun doğru olmak zorunda olmadığını gösteriniz.
10. Eğer A ve B sonlu iki küme ve $|A| = |B|$ ise örten olan her $f : A \to B$ fonksiyonunun aynı zamanda birebir olduğunu ispatlayınız. Eğer A ve B sonlu değil ise bunun doğru olmak zorunda olmadığını gösteriniz.

14.4 Cantor-Bernstein-Schröeder Teoremi

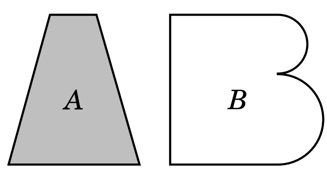
Sayılarda sıklıkla kullanınlan bir özellik, $a \le b$ ve $b \le a$ ise $a = b$ olmasıdır. Aynı özelliğin kardinalite için de geçerli olup olmadığını sorabiliriz: Eğer $|A| \le |B|$ ve $|B| \le |A|$ ise $|A| = |B|$ olur mu? Bu gerçekten de doğrudur ve bu bölümün amacı bunu ispatlamaktır. Bu iş, iki kümenin aynı kardinaliteli olduğunu ispatlamak için alternatif (ve oldukça etkili) bir yöntem verecektir.

Tanım 14.4'den hatırlanacağı üzere $|A| \le |B|$ ise birebir bir $f : A \to B$ fonksiyonu vardır. Benzer şekilde $|B| \le |A|$ ise birebir bir $g : B \to A$ vardır.

Amacımız, $|A| \le |B|$ ve $|B| \le |A|$ iken $|A| = |B|$ olduğunu göstermektir. Bir başka deyişle, $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ birebir fonksiyonları varken bir $h : A \to B$ eşlemesinin de var olduğunu göstermektir. Bunun ispatı çok zor değildir ama çok açık da değildir. Bahsi geçen f ve g fonksiyonlarının böyle bir h eşlemesi garanti etmesi **Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi** diye adlandırılır. Bu teorem, herhangi iki A ve B kümesinin aynı kardinaliteli olduğunu kanıtlamak için oldukça kullanışlıdır çünkü bir $A \to B$ eşlemesi bulmak yerine, $A \to B$ ve $B \to A$ birebir fonksiyonlarını bulmanın yeterli olduğunu söyler. Birebir fonksiyonları bulmak, eşlemeleri bulmaktan daha kolaydır.

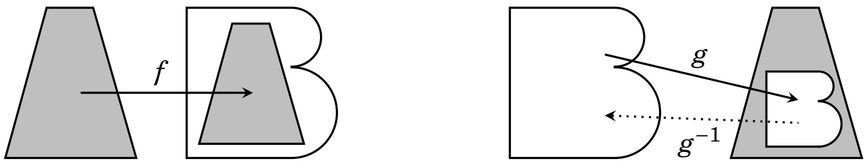
Cantor-Bernstein-Schröeder teoremini birazdan ispatlayacağız. Ama öncesinde, ispat için bize yol gösterecek görsel bir örnek üzerinde çalışalım.

Şimdi, birebir olacak şekilde $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ var olsun. Bunları kullanarak bir $h : A \to B$ eşlemesi üretilmelidir. Aşağıda, A ve B kümeleri taslak olarak gösterilmiştir. Belirgin olması için bu kümeler temsil ettikleri harf şekline çizilmiş ve A kümesi gri renge boyanmıştır.



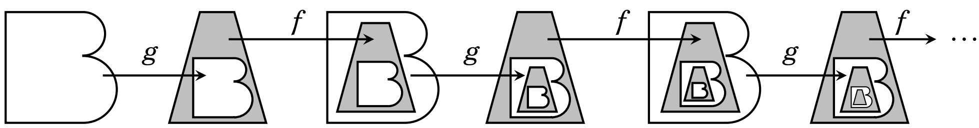
Şekil 14.3: A ve B kümeleri

Birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları Şekil 14.4'te gösterilmiştir. Aslında f fonksiyonu, A kümesinin $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ ile temsil edilen bir "kopyasını" B içine yerleştirir. Eğer f örten değil ise f fonksiyonunun görüntüsü olan kopya, B'nin tamamını kapsamaz. Benzer şekilde g fonksiyonu, B kümesinin $g(B)$ ile temsil edilen bir "kopyasını" A içine yerleştirir. Bu fonksiyonlar örten olmak zorunda olmadıkları için terslerinin varlıkları garanti edilemez. Ancak B kümesinden $g(B) = \{g(x) : x \in B\}$ kümesine tanımlı $g : B \to g(B)$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bu nedenle $g^{-1} : g(B) \to B$ ters fonksiyonu vardır. (Bu ters fonksiyona birazdan ihtiyaç duyacağız.)



Şekil 14.4: Birebir olan $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları

Birebir fonksiyonlardan oluşan Şekil 14.5'deki zincirini ele alalım. Soldan başlayarak, g fonksiyonu B'nin bir kopyasını A içine yerleştirir. Daha sonra f fonksiyonu, (B'nin bir kopyasını barındıran) A kümesini B içine koyar. Ondan sonra da g fonksiyonu, içinde B olan bir A kümesi barındıran B kümesini A içine yerleştirir. Bu süreç, değişmeli olarak devam eder.



Şekil 14.5: Birebir fonksiyonlardan oluşan sonsuz bir zincir

Şimdi, $B \to A \to B \to A \to B \to A \to \cdots$ sonsuz dizisini inceleyelim.

Bu dizideki ilk A kümesi, $A - g(B)$ taralı bölgesini içerir. Dizideki ikinci A kümesi, $(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B))$ taralı bölgesini içerir. Üçüncü A kümesindeki taralı bölge aşağıda verilmiştir:

$$(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B)) \cup (g \circ f \circ g \circ f)(A - g(B)).$$

Notasyonu basitleştirmek amacıyla $(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f)$ ve $(g \circ f)^3 = (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)$ vb. diyelim. Ayrıca, A üzerindeki özdeşlik fonksiyonunu $(g \circ f)^0 = i_A$ şekilde yazalım. Buna göre dizinin $n-$yinci A kümesindeki taralı bölge aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

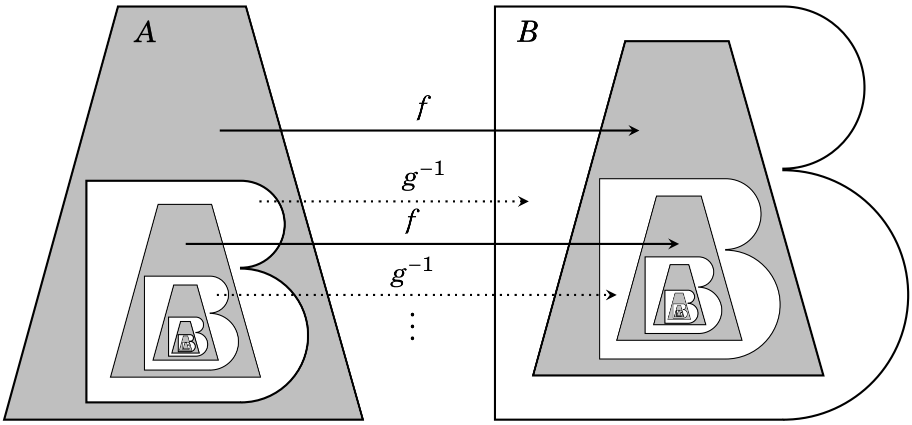
$$\bigcup_{k=0}^{n-1} (g \circ f)^k \big(A - g(B)\big).$$

Böylece A kümesi gri ve beyaz renklerdeki iki bölgeye ayrılır. Gri bölge

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} (g \circ f)^k \big(A - g(B)\big)$$

kümesidir. Beyaz bölge ise $A - G$ kümesidir. (Bkz. Şekil 14.6.)

Bumaya çalıştığımız $h : A \to B$ eşlemesi için 14.6'dan bir fikir edinebiliriz. Birebir olan f fonksiyonu, soldaki gri bölgeleri sağdaki gri bölgelerle; yine birebir olan $g^{-1} : g(B) \to A$ fonksiyonu ise soldaki beyaz bölgeleri sağdaki beyaz bölgelerle eşler. Böylelikle, x gri bir nokta ise $h(x) = f(x)$ ve x beyaz bir nokta ise $h(x) = g^{-1}(x)$ olcak şekilde $h : A \to B$ fonksiyonu tanımlanabilir.



Şekil 14.6: Birebir ve örten $h : A \to B$ fonksiyonu

Kabaca ele aldığımız bu argüman, birebir olacak şekilde $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ varken bir $h : A \to B$ eşlemesinin de var olduğunu gösterir. Ancak bu bir ispat değildir. Şimdi bunu bir teorem olarak ifade ederek, yukarıdaki diyagram ve fikirler ışığında ispatı dikkatli bir şekilde yapalım.

Teorem 14.10 (Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi) Eğer $|A| \le |B|$ ve $|B| \le |A|$ ise $|A| = |B|$ olur. Başka bir deyişle, birebir olacak şekilde $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları var ise o zaman bir $h : A \to B$ eşlemesi de vardır.

İspat. (Doğrudan ispat) Kabul edelim ki birebir olacak şekilde $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları var olsun. B kümesinden g fonksiyonunun görüntü kümesine tanımlı $g : B \to g(B)$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bu nedenle $g^{-1} : g(B) \to B$ ters fonksiyonu vardır. (Dikkat edilirse $g : A \to B$ fonksiyonu örten olmadığı sürece $g^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu yoktur.) Şimdi,

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} (g \circ f)^k \big(A - g(B)\big) \subseteq A$$

altkümesini ele alalım. $W = A - G$ olsun. Buna göre $A = G \cup W$ kümesi, G (gri) ve W (beyaz) kümelerine ayrılabilir. Şimdi, $h : A \to B$ fonksiyonunu

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in G \\ g^{-1}(x) & x \in W \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu tanım anlamlıdır çünkü $x \in W$ ise $x \notin G$ olur. Buradan $x \notin A - g(B) \subseteq G$ ve böylece $x \in g(B)$ bulunur. O hâlde $g^{-1}(x)$ tanımlıdır.

İspatı tamamlamak için h fonksiyonunun hem birebir hem de örten olduğunu göstermek gerekir.

Birebirlik için $h(x) = h(y)$ olduğunu kabul edip $x = y$ olduğunu gösterelim. Burada üç durum söz konusudur. Birincisi; $x, y \in G$ ise $h(x) = h(y)$ olması $f(x) = f(y)$ olması anlamına gelir ki f birebir olduğu için $x = y$ elde edilir. İkincisi; $x, y \in W$ ise $h(x) = h(y)$ olması $g^{-1}(x) = g^{-1}(y)$ olması anlamına gelir. Bu eşitliğin her iki tarafına g uygulanarak $x = y$ bulunur. Üçüncüsü, x ve y elemanlarından biri G diğeri W kümesindedir. Örneğin $x \in G$ ve $y \in W$ olsun. G kümesinin tanımından, $x = (g \circ f)^k(z)$ olacak şekilde $k \geq 0$ ve $z \in A - g(B)$ vardır. Buna göre $h(x) = h(y)$ ifadesi $f(x) = g^{-1}(y)$ yani $f((g \circ f)^k(z)) = g^{-1}(y)$ anlamına gelir. Bu eşitliğin her iki tarafına g uygulanarak $(g \circ f)^{k+1}(z) = y$ bulunur. Buradan $y \in G$ elde edilir. Ancak $y \in W$ olduğu için bu imkânsızdır. Dolayısıyla üçüncü durum ortaya çıkamaz. İlk iki duruma göre $h(x) = h(y)$ ifadesi $x = y$ olmasını gerektirdiği için h birebirdir.

Örtenlik için herhangi bir $b \in B$ alalım ve $h(x) = b$ olacak şekilde bir $x \in A$ olduğunu gösterelim. Dikkat edilirse $g(b) \in A$ olduğu için ya $g(b) \in W$ ya da $g(b) \in G$ olur. Eğer $g(b) \in W$ ise $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$ olur ve $x = g(b) \in A$ elemanı $h(x) = b$ şartını sağlar. Eğer $g(b) \in G$ ise G'nin tanımı gereği

$$g(b) = (g \circ f)^k(z)$$

olacak şekilde $k \geq 0$ ve $z \in A - g(b)$ vardır. Aslında $k > 0$ olmalıdır çünkü $k = 0$ için $g(b) = (g \circ f)^0(z) = z \in A - g(B)$ olur. Ancak $g(b) \notin A - g(B)$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned} g(b) &= (g \circ f) \circ (g \circ f)^{k-1}(z) \\ &= g\Big(f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big)\Big) \end{aligned}$$

yazılabilir. Fakat g birebir olduğu için

$$b = f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big)$$

bulunur. Şimdi, $x = (g \circ f)^{k-1}(z)$ olsun. G kümesinin tanımından $x \in G$ olur. Buradan $h(x) = f(x) = f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big) = b$ yazılabilir. Böylece her $b \in B$ için $h(x) = b$ olacak şekilde bir $x \in A$ vardır. O hâlde h örtendir.

Sonuçta, $h : A \to B$ hem birebir hem de örtendir; yani bir eşlemedir. ■

Cantor-Bernstein-Schröeder teoreminin nasıl kullanılabileceğine dair birkaç örnek verelim. Bu örnekler $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ eşitliğini de içerir.

Örnek 14.6 $\mathbb{R}$ üzerindeki $[0,1)$ ve $(0,1)$ aralıkları aynı kardinalitelidir.

Bu oldukça akla yatkındır çünkü sol uçtaki 0 noktası dışında bu iki aralık aynıdır. Buna rağmen bir $[0,1) \to (0,1)$ eşlemesi oluşturmak sıkıntılıdır. (Ancak çok zor değildir. Bkz: Bölüm 14.1'deki 11. alıştırmanın çözümü.)

Daha basit bir ispat şu şekilde yapılabilir: $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$ ile tanımlı $f : [0,1) \to (0,1)$ ve $g(x) = x$ ile tanımlı $g : (0,1) \to [0,1)$ fonksiyonları birebirdir. Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi gereğince bir $h : [0,1) \to (0,1)$ eşlemesi vardır. Dolayısıyla $|[0,1)| = |(0,1)|$ olur.

Teorem 14.11 $\mathbb{R}$ ve $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ kümeleri aynı kardinalitelidir.

İspat. Örnek 14.4'te $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ ve Örnek 14.6'da $|(0,1)| = |[0,1)|$ oldukları gösterilmiştir. Buradan $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$ yazılabilir. İspat için $|[0,1)| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu göstermek gerekir. Cantor-Bernstein-Schröeder teoremine göre, birebir olacak şekilde $f : [0,1) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ve $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ bulmak yeterlidir.

Bilindiği üzere $[0,1)$ aralığındaki her sayının $0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ formundaki ondalık gösterimi bir tektir. Buradaki b_i rakamlarından her biri $0,1,2,\ldots,9$ sayılarından biridir. Ayrıca, sonunda 9 rakamı tekrar eden bir ondalık gösterim yoktur. (Örneğin $0,35999\overline{9} = 0,36\overline{0}$ olduğunu hatırlayın.) Bu gözlemi kullanarak, $f : [0,1) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ fonksiyonunu

$$f(0,b_1b_2b_3b_4\ldots) = \{10b_1,\, 10^2b_2,\, 10^3b_3,\ldots\}$$

ile tanımlayalım. Örneğin $f(0,1212\overline{12}) = \{10,200,1000,20000,100000,\ldots\}$, $f(0,05) = \{0,500\}$ ve $f(0,5) = f(0,5\overline{0}) = \{0,50\}$ olur. Bu fonksiyonun birebir olduğunu görmek için $[0,1)$ aralığından, birbirinden farklı $0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ ve $0,d_1d_2d_3d_4\ldots$ sayılarını ele alalım. En az bir i indisi için $b_i \neq d_i$ olduğundan $b_i10^i \in f(0,b_1b_2b_3b_4\ldots)$ fakat $b_i10^i \notin f(0,d_1d_2d_3d_4\ldots)$ olur. Böylece $f(0,b_1b_2b_3b_4\ldots) \neq f(0,d_1d_2d_3d_4\ldots)$ elde edilir. Sonuç olarak f birebirdir.

Şimdi, $i \in X$ ise $b_i = 1$ ve $i \notin X$ ise $b_i = 0$ olmak üzere $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ fonksiyonunu $g(X) = 0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ olarak tanımlayalım. Örneğin, $g(\{1,3\}) = 0,10100\overline{0}$ ve $g(\{2,4,6,8,\ldots\}) = 0,010101\overline{01}$ olur. Ayrca $g(\emptyset) = 0$ ve $g(\mathbb{N}) = 0.111\overline{1}$ olduğu görülebilir. Birebirlik için $X \neq Y$ olduğunu kabul edelim. Buna göre X veya Y kümelerinden birine ait olup diğerine ait olmayan en az bir i tamsayısı vardır. Buradan $g(X) \neq g(Y)$ bulunur çünkü bunların virgülden sonraki $i-$yinci rakamları birbirinden farklıdır. O hâlde g birebirdir.

Birebir olacak şekilde $f : [0,1) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ve $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ var olduğu için, Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi gereğince bir $h : [0,1) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ eşlemesi vardır. O hâlde $|[0,1)| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ olur. Böylece, $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$ olduğu için $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ sonucuna ulaşılır. ■

Daha önceden $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ olduğunu biliyorduk. Biraz önce de $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu ispatladık. Bu gözlem, $\mathbb{R}$'nin kardinalitesinin $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ değerinden "çok da uzak" olmadığını gösterir. Bu bölümü $\aleph_0$ ve $|\mathbb{R}|$ arasındaki bu gizemli ilişki üzerine birkaç söz ederek kapatalım.

Bu ünitenin başlangıcında $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$ olduğunu kanıtladık. Cantor'un sonsuz kümeler üzerindeki teorisini formüle etmesinden neredeyse bir asır sonra, matematikçiler

$$\aleph_0 < |A| < |\mathbb{R}|$$

olacak şekilde bir A kümesinin var olup olmadığı sorusuna yanıt aramaya başladı. Yaygın olarak böyle bir kümenin var olmadığına inanılıyordu ancak hiç kimse bunu ne ispatlayabildi ne de çürütebildi. Böyle bir A kümesinin var olmadığı iddiası, **süreklilik hipotezi** olarak anılmaya başladı.

Teorem 14.11, $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu belirtir. Bunu, 282. sayfada verilen Eşitlik (14.2)'deki zincirde kullanarak aşağıdaki ilişkiyi yazabiliriz:

$$\begin{array}{ccccccccc} \aleph_0 & & |\mathbb{R}| & & & & & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & & & & & \\ |\mathbb{N}| & < & |\mathscr{P}(\mathbb{N})| & < & |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))| & < & |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))| & < & \cdots \end{array}$$

Buna göre süreklilik hipotezi, $\mathbb{N}$ ve onun kuvvet kümesinin kardinaliteleri arasında başka hiçbir kümenin kardinalitesinin olmayacağını iddia eder.

Bu iddia sezgisel olarak mantıklı görünse de Cantor'un onu 1880'lerde ortaya attığından beri ispatı yoktur. Aslında bu iş neredeyse paradoksaldır. Mantık bilimci Kurt Gödel, yeterince güçlü ve tutarlı olan herhangi bir aksiyomatik sistemde, ispatlanamayacak ya da çürütülemeyecek önermelerin var olduğunu 1931 yılında kanıtladı.

Daha sonra süreklilik hipotezinin olumsuzunun, kümeler teorisinin standart aksiyomları ile (Bölüm 1.10'da bahsedilen Zermelo-Fraenkel aksiyomları) ispatlanamayacağını gösterdi. Böylelikle, ya süreklilik hipotezi yanlıştır ve bu kanıtlanamaz ya da süreklilik hipotezi doğrudur.

Paul Cohen, 1964 yılında şaşırtıcı bir sonuç keşfetti: Mantık yasaları ve kümeler teorisi aksiyomları göz önüne alındığında, hiçbir ispattan süreklilik hipotezi çıkarımı yapılamaz. Daha açık bir ifadeyle, süreklilik hipotezinin *ispatlanamayacağını* kanıtladı.

Gödel ve Cohen'in sonuçları bir araya getirilerek matematiğin standart aksiyomları çerçevesinde süreklilik hipotezinin doğru veya yanlış olduğuna "karar vermenin" mümkün olmadığı görülür. Süreklilik hipotezini doğru kabul etmekten ya da reddetmekten hiçbir mantıksal çelişki ortaya çıkmaz. Bunu doğru ya da yanlış kabul etme konusunda özgürüz. Bu kararların her ikisi de kümeler teorisinin farklı –fakat aynı ölçüde tutarlı– versiyonlarıdır.

Bu durum, mantığın temellerini ve bu kitapta yaptığımız her şeyi baltalıyormuş gibi görünebilir. Süreklilik hipotezi bir *önerme* olmalıdır. Bu nedenle ya doğru ya da yanlış olmalıdır. İkisi birden nasıl olabilir ki?

Şimdi bunu anlamaya yardım edecek bir örnek verelim. Bunun için $\mathbb{Z}_n$ sayı sistemini ele alalım. Eğer $[2] = [0]$ olup olmadığı sorulursa ne olur? Elbette ki cevap n değerine bağlıdır. Örneğin, $[2] = [0]$ ifadesi $\mathbb{Z}_2$'de doğrudur fakat $\mathbb{Z}_3$'te yanlıştır. Üstelik, $[2] = [0]$ ifadesinin doğru olduğu iddia edilirse bunun mantıksal olarak $\mathbb{Z}_2$ sisteminde gerçekleştiği sonucuna varılır. Eğer $[2] = [0]$ ifadesinin yanlış olduğu iddia edilirse başka bir $\mathbb{Z}_n$ üzerinde çalışılıyor demektir. O hâlde $[2] = [0]$ ifadesinin doğru ya da yanlış olması, $\mathbb{Z}_n$ sayı sisteminde bir tutarsızlık olmasını gerektirmez. Sonuç olarak, $[2] = [0]$ önermesi $\mathbb{Z}_2$ "evreni" içinde doğrudur, (ve örneğin) $\mathbb{Z}_3$ evreni içinde yanlıştır.

Süreklilik hipotezi için de durum aynıdır. Bunun doğru olduğunu söylemek, bir kümeler teorisi sistemi verir. Yanlış olduğunu söylemek ise başka bir kümeler teorisi sistemi verir. Her ne kadar farklı olsalar da Gödel ve Cohen'in bulguları bu iki teorinin eşit derecede tutarlı ve geçerli matematiksel evrenler olduğunu gösterir.

O hâlde hangisine inanmalısınız? Neyse ki bu çok fark etmez çünkü önemli matematiksel sonuçlar süreklilik hipotezine dayanmaz. (Bunlar, her iki evrende de doğrudur.) Matematiğin temellerini derinlemesine incelemediğiniz sürece, süreklilik hipotezini doğru kabul etmekten bir zarar gelmez. Çoğu matematikçi bu konuda bilinmezlik ilkesini benimser ancak süreklilik hipotezini doğru kabul eden versiyonu tercih etme eğilimindedir.

Süreklilik hipotezi ile ilgili olan bu durum, matematiğin muazzam derinliğinin bir kanıtıdır. Bu bize, kitapta sunulan fikirlerle **başlayan** sistematik mantık yöntemlerinin titizliğinin ve dikkatinin önemini hatırlatır.

Bölüm 14.4 Alıştırmaları

1. Eğer $A \subseteq B$ ve birebir bir $g : B \to A$ fonksiyonu var ise $|A| = |B|$ olduğunu gösteriniz.
2. $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ olduğunu gösteriniz. Öneri: $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$ olduğunu göstererek başlayabilirsiniz
3. Doğal sayılar kümesinden $\{0,1\}$ üzerine tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $\mathscr{F}$ olsun. $|\mathbb{R}| = |\mathscr{F}|$ olduğunu gösteriniz.
4. Reel sayılar kümesinden $\{0,1\}$ üzerine tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $\mathscr{F}$ olsun. $|\mathbb{R}| < |\mathscr{F}|$ olduğunu gösteriniz.
5. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesini ele alalım. $|B| = |\mathbb{R}^2|$ olduğunu gösteriniz.
6. $|\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu gösteriniz.
7. İspatlayın ya da çürütün: Eğer $f : A \to B$ birebir fonksiyonu ve $g : A \to B$ örten fonksiyonu var ise bir $h : A \to B$ eşlemesi vardır.

Sonuç

Eğer bu kitapta verilen fikirleri özümseyerek öğrendiyseniz artık matematiğin yorumlanması ve aktarılması için etkileyici bir takım araçlara sahipsiniz demektir. Bu araçlar, ileri seviye için vazgeçilmezdir. Ancak bazı şeyleri inşa etmek, elbette ki araçlardan daha fazlasını gerektirir. Yaratıcılık, ilham, beceri, yetenek, sezgi, tutku, planlama ve ısrar son derece önemlidir. Eğer buraya kadar geldiyseniz bu özelliklere muhtemelen yeterli ölçüde sahip olduğunuz rahatlıkla söylenebilir.

Matematiği anlama arayışının sonu yoktur. Artık, siz bu yolculuk için iyi bir donanıma sahipsiniz. Bu kitaptan öğrendikleriniz, umarım ki sizi daha iyi bir anlama, yaratıcı olma ve ifade etme düzlemine taşır.

En iyi dileklerimle, bol şanslar...

R.H.

Dizin